JOURNAL OF ALGEBRA 64, 460–528 (1980)

Endliche Gruppen, die eine Maximale 2-lokale Untergruppe besitzen, so daß $Z(F^*(M))$ eine TI — Menge in G ist

GERNOT STROTH*

Universität Heidelberg, Mathematisches Institut, D-6900 Heidelberg, Germany

Communicated by B. Huppert

Received January 22, 1979

1

In [25] untersucht Timmesfeld die folgende Fragestellung. Es sei G eine endliche Gruppe mit $\mathbf{O}_2(G) = 1$. Weiter sei M eine maximale 2-lokale Untergruppe von G und $Q = \mathbf{O}_2(M) = \mathbf{F}^*(M)$. Weiter sei ein maximaler abelscher Normalteiler X von M eine TI-Menge in G, d.h. $X^g \cap X = 1$ oder X für alle $g \in G$. Dies ist eine Situation wie wir sie in den meißten bekannten einfachen Gruppen antrefen. Es wird dann bewiesen, daß eine der folgenden Aussagen gilt:

(i) Q ist vom symplektischen Typ,

(ii) $\langle X^G \rangle \cong L_3(4)$,

(iii) X ist schwach abgeschlossen in Q bezüglich G,

(iv) $X = \mathbf{Z}(Q) = Q' = \Phi(Q)$ und $Q = \langle X^g \mid X^g \subseteq Q, g \in G \rangle$.

Bekanntlich sind alle einfachen Gruppen, die (i) erfüllen, bestimmt. Die Gruppen, die (iii) erfüllen hat Timmesfeld kürzlich bestimmt [27]. Das Ziel dieser Arbeit ist es die Struktur von M so weit zu bestimmen, daß es dann möglich ist mit einem vernünftigen Aufwand die Gruppe G selbst zu bestimmen. Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Sei G eine endliche Gruppe mit $\mathbf{O}_2(G) = 1$. Weiter sei M eine maximale 2-lokale Untergruppe von G und $Q = \mathbf{O}_2(M) = \mathbf{F}^*(M)$. Es sei weiter Q das zentrale Produkt von 2-Gruppen vom Typ $U_3(q)$ und $L_3(q)$, $q = |\mathbf{Z}(Q)| > 2$. Schließlich sei noch $\mathbf{Z}(Q)$ ein maximaler abelscher Normalteiler von M und $\mathbf{Z}(Q)^g \cap \mathbf{Z}(Q) = \mathbf{Z}(Q)$ oder 1 für alle $g \in G$. Es sei weiter $\mathbf{Z}(Q)$ nicht schwach abgeschlossen in Q bezüglich G. Sei $\mathbf{Z}(Q) \neq B = \mathbf{Z}(Q)^g \subseteq Q$. Setze $Q_B = \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_G(B))$ und $L_B = Q(Q_B \cap M)$. Schließlich sei — der natürliche Homomorphismus von M auf M/Q. Dann gilt eine der folgenden Aussagen*:

* Neue Anschrift: II. Math. Institut, Freie Universität Berlin, Königin-Luise-Str. 24-26, 1000 Berlin 33, Germany.

0021-8693/80/060460–69$02.00/0

(1) *Q ist vom Typ $L_3(q)$,*

(2) $|Q| = q^5$, $\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q)$,

(3) $|Q| = q^9$, $\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q^3)$, $C_{\overline{C_M(Z(Q))}}(\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle) = 1$,

(4) *$\bar{L}_B$ ist keine TI-Menge in $\bar{M}$. In diesem Fall definiere für $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ die Gruppe $\bar{R}_t = \langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \rangle$ und $\bar{N}_t = \mathbf{O}_2(\bar{R}_t)$. Dann gibt es ein $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$, so daß eine der folgenden Aussagen gilt:*

(i) $|Q| = q^9$, $|\bar{N}_t| = q$, $\bar{R}_t/\bar{N}_t \cong \Omega^{\pm}(4, q)$.

(ii) $|Q| = q^{2n+1}$, $|\bar{N}_t| = q$, $\bar{R}_t/\bar{N}_t \cong \Omega^{\pm}(n, q)$, $\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q) \times \Omega^{\pm}(n, q)$.

(iii) $|Q| = q^{21}$, $\mathbf{E}(\bar{M}) = \langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle \cong U_6(q)$ *oder* $L_6(q)$.

(iv) $|Q| = q^{33}$, $|\bar{N}_t| = q^{17}$, $\bar{R}_t/\bar{N}_t \cong \Omega^{+}(8, q)$. *Weiter erfüllt* $N_{\overline{C_M(Z(Q))}}(\mathbf{Z}(\bar{N}_t))$ *die Voraussetzungen dieses Satzes.*

(v) $|Q| = q^{57}$, $|\bar{N}_t| = q^{33}$, $\bar{R}_t/\bar{N}_t \cong \Omega^{+}(12, q)$. *Weiter erfüllt* $N_{\overline{C_M(Z(C))}}(\mathbf{Z}(\bar{N}_t))$ *die Voraussetzungen dieses Satzes.*

In allen diesen Fallen (i)–(v) *ist stets* $C_{\overline{C_M(Z(Q))}}(\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle) = 1$.

(vi) $\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle \cong SL_n(q)$. *Weiter ist* $Q/\mathbf{Z}(Q) = V_1 \otimes V_2$, *wobei* V_1 *der natürliche* $SL_n(q)$*—Modul und* V_2 *sein dualer ist. Es gibt ein* $x \in M$ *mit* $V_1^x = V_2$. *Schließlich ist noch* $|C_{\overline{C_M(Z(Q))}}(\langle \bar{L}_B^{\bar{M}} \rangle)| \mid q - 1$.

In allen Fällen ist stets $M/\mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$ *eine Untergruppe einer Frobeniusgruppe der Ordnung* $(q-1)r$, $q = 2^r$, *und* $q - 1 \nmid |M/\mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))|$.

Die Aussagen (4)(iv) und (4)(v) sind so formuliert, daß es möglich ist, wenn man die Struktur von G bestimmt, die Struktur von $\mathbf{E}(\bar{M})$ per Induktion zu erhalten.

Alle Fälle bis auf (4)(vi) kommen in einfachen Gruppen vor. So kommt (1) in $L_3(q)$, (2) in $G_2(q)$, (3) in ${}^3D_4(q)$, (4)(i) in $\Omega^{\pm}(8, q)$, (4)(ii) in $\Omega^{\pm}(n+4, q)$, (4)(iii) in ${}^2E_6(q)$ bzw. $E_6(q)$, (4)(iv) in $E_7(q)$ und (4)(v) in $E_8(q)$ vor. Der Fall (4)(vi) kommt in keiner bekannten einfachen Gruppe vor. Er kommt allerdings in einer Erweiterung von $L_{n+2}(q)$ mit einem geeigneten Automorphismus der Ordnung zwei vor.

Kürzlich zeigte Timmesfeld [28], daß die Gruppe Q, die in seiner Arbeit [25] im Fall (iv) vorkommt, ein zentrales Produkt von 2-Gruppen vom Typ $L_3(q)$ sein muß. Das liefert dann:

KOROLLAR. *Sei G eine endliche Gruppe mit $\mathbf{O}_2(G) = 1$ und M eine maximale 2-lokale Untergruppe von G mit $Q = \mathbf{O}_2(M) = \mathbf{F}^*(M)$. Es enthalte weiter M einen maximalen abelschen Normalteiler X, der eine TI—Menge in G ist. Ist Q nicht symplektisch und X nicht schwach abgeschlossen in Q bzgl. G, so ist $\langle X^G \rangle \cong L_3(4)$ oder die Struktur von M wie im Hauptsatz angegeben.*

Der Beweis des Satzes folgt im wesentlichen dem Beweis von [24]. Allerdings müssen kombinatorische Schlüsse weitgehend durch darstellungstheoretische

Schlüsse ersetzt werden. So insbesondere der Beweis von (3.7). Abweichend von [24] wird auch der Fall, daß die Weite $\leqslant 6$ ist, d.h. $|Q| \leqslant q^{13}$, behandelt. Während die Schlüsse im Fall, daß $\bar{L}_B$ keine Involutionen vom Typ a_2 enthält, teilweise komplizierter als in [24] sind, ist der andere Fall einfacher zu behandeln. Es folgt nämlich aus $q > 2$, daß es Vierergruppen gibt, die nur Involutionen vom Typ a_2 enthalten. Dies zusammen mit [22] schränkt die Struktur von $\overline{M}$ so stark ein, daß nur wenige Fälle zu behandeln beiben. Die Resultate von Cooperstein und Mason [10] liefern dann, daß nur der Fall $\mathbf{E}(\overline{M}) \simeq SL_n(q)$ möglich ist.

Das wichtigste Hilfsmittel zum Beweis des Satzes ist ein Lemma von Timmesfeld [25, (2.18)], das besagt, daß $\langle Q, Q_B\rangle$ auf $BZ(Q)$ die Gruppe $L_2(q)$ induziert. Das liefert Elemente $\tau \in M - \mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$ von der Ordnung $q-1$, für die es im Fall $q = 2$ kein Analogon gibt. Weiter ist die Operation von τ auf Q und Q_B weitgehend bekannt. Das Ausnutzen dieser Operationen vereinfacht manche Schlüsse erheblich.

Es ist noch erwähnenswert, daß die Fälle nicht auftreten, die den Zentralisatoren in [24] entsprechen, die in sporadischen einfachen Gruppen auftreten. Sei M_1 ein solcher Zentralisator und $Q_1 = \mathbf{O}_2(M_1)$. Dann ist häufig $\mathbf{O}(M_1/Q_1) \neq 1$, wie z.B. in J_4 oder $M(24)'$, oder es ist $M_1/Q_1 \simeq \Omega(Q_1/\mathbf{Z}(Q_1))$, wie z.B. in J_2, J_3, Sz oder $\cdot 1$. Enthält $\bar{L}_B$ keine Involutionen vom Typ a_2, so kann ein Analogon zum ersten Fall nach (4.4) nicht auftreten. Dieses liegt im wesentlichen an der Existenz des oben angegebenen Elementes τ. Ein Analogon zum zweiten Fall kann nach einem Resultat von B. Beisiegel [7], das besagt, daß es für $q > 2$ keine Erweiterung von Q mit $\Omega(Q/\mathbf{Z}(Q))$ geben kann, nicht auftreten.

Ich hoffe, daß die Bezeichnungen weitgehend Standard sind und in [15] gefunden werden können. Zusätzlich benutze ich die Bender-Notation für $\mathbf{E}(G)$ und $\mathbf{F}^*(G)$. Schließlich kann man in [5] finden, was es heißt, daß eine Involution aus $\Omega(Q/\mathbf{Z}(Q))$ vom Typ a_m oder c_m auf $Q/\mathbf{Z}(Q)$ operiert. Wir bezeichnen $Q/\mathbf{Z}(Q)$ mit $\tilde{Q}$. Eine 2-Gruppe T ist vom Typ $L_3(q)$ oder $U_3(q)$, falls T zu einer Sylow 2-Untergruppe von $L_3(q)$ bzw. $U_3(q)$ isomorph ist.

2. Hilfssätze

(2.1) Lemma. *Sei $G \simeq \Omega^{\pm}(2m, q)$ oder $Sp(2m, q)$, $m \geqslant 2$, S der Stabilisator eines isotropen Punktes in der natürlichen Darstellung und $L = \mathbf{O}_2(S)$. Sei $g \in G$ mit $L \cap L^g = 1$ und $x \in L^{g^*}$ nicht vom Typ a_2. Dann gilt:*

(i) $G = \langle L, L^g\rangle = \langle L, x\rangle$.

(ii) *Ist V ein F_2G-Modul mit $V = \mathbf{C}_V(L) \oplus \mathbf{C}_V(L^g)$, so ist $|V| = q^{n2^m}$ für $G \simeq \Omega^-(2m, q)$ oder $Sp(2m, q)$, $m \geqslant 2$, bzw. $|V| = q^{n2^{m-1}}$ für $G \simeq \Omega^+(2m, q)$, $m \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Ist $U \subseteq \mathbf{C}_V(L)$ ein $\mathbf{N}_G(L)$ invarianter Unterraum, so ist UU^g ein G-invarianter Unterraum.*

Beweis. Nach [23, (13.5.19)] operiert L auf $M = \{L^h \mid L \cap L^h = 1, h \in G\}$ semiregulär. Also ist $\mathbf{N}_L(L^g) = 1$. Es folgt, daß L transitiv auf den Paaren (L^g, L^h) mit $L^g \cap L^h = 1$ operiert. Setze $X = \langle L, L^g \rangle$. Es gehöre L in der natürlichen Darstellung zu dem Punkt v. Dann gehört L^g zu einem Punkt w, der nicht senkrecht auf v ist. Also enthält X mit L^g alle L^h, die zu isotropen Punkten gehören, die nicht senkrecht auf v^g sind. Nun folgt dann $G = \langle L^g \mid g \in G \rangle \leqslant X$.

Sei nun $L \cap L^x \neq 1$. Nach [23, (13.5.18)] ist dann $|L \cap L^x| \leqslant q$. Weiter enthält $L \cap L^x$ nur Involutionen vom Typ a_2. Sei nun $\alpha \in L \cap L^x$. Dann ist $x \in L^g \cap (L^g)^\alpha$. Da x nicht vom Typ a_2 ist, folgt $L^g = L^{g\alpha}$. Also ist $\mathbf{N}_L(L^g) \neq 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\langle L, x \rangle = \langle L, L^x \rangle = G$.

Wir zeigen (ii) durch Induktion nach m. Sei $\mathbf{C}_V(x) \neq \mathbf{C}_V(x) \neq \mathbf{C}_V(L^g)$. Dann ist nach (i) $\mathbf{C}_V(G) \neq 0$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\mathbf{C}_V(L^g) = \mathbf{C}_V(x) = [V, x] = [V, L^g]$, da L^g von Konjugierten von x erzeugt wird.

Sei zunächst $G \simeq \Omega^-(4, q)$ oder $Sp_4(q)$. Die Struktur von G liefert, daß es ein $y \in L$ mit $o(xy) = q^2 + 1$ gibt. Da $x \sim y$ ist, folgt, daß y nicht vom Typ a_2 ist. Somit ist $\mathbf{C}_V(x) \cap \mathbf{C}_V(y) = \mathbf{C}_V(L) \cap \mathbf{C}_V(L^g) = 0$. Also operiert xy fixpunkfrei auf V. Mit [1, Korollar 2, p. 358] erhalten wir nun $q^4 \mid |V|$. Das ist die Behauptung für $m = 2$.

Sei nun $G \simeq \Omega^+(6, q) \simeq L_4(q)$. Dann folgt wie oben, daß es ein y mit $o(xy) = q^2 + 1$ gibt. Also folgt wieder $q^4 \mid |V|$.

Sei nun $m \geqslant 3$ bzw. $m \geqslant 4$, falls $G \simeq \Omega^+(2m, q)$ ist. Weiter gelte die Aussage (ii) für $m - 1$. Es ist $\mathbf{N}_G(L)' = LX$, wobei $X \simeq \Omega^\pm(2m-2, q)$ oder $Sp_{2m-2}(q)$ ist. Nach [23, Sek. 13] gibt es ein L^h, so daß $L^h \cap X = A = \mathbf{O}_2(S_1)$ ist, wobei S_1 der Stabilisator eines isotropen Punktes in der natürlichen Darstellung von X ist. Sei $t \in X$ und $C = A^t$ mit $C \cap A = 1$. Dann ist nach (i) $X = \langle C, A \rangle$. Sei $L^h \cap L^{ht} \neq 1$. Dann ist $\langle L^h, L^{ht} \rangle \subseteq \mathbf{C}_G(L^h \cap L^{ht})$. Das liefert $G \simeq Sp(2m, q)$. Weiter ist $\langle L^h, L^{ht} \rangle \subseteq \mathbf{N}_G(L)$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $L^h \cap L^{ht} = 1$.

Sei $W = \mathbf{C}_V(L)$. Es gibt ein $a \in A^\#$ und $b \in B^\#$, beide nicht vom Typ a_2 in X. Es ist $\mathbf{C}_W(b) = \mathbf{C}_W(L^{ht})$ und $\mathbf{C}_W(a) = \mathbf{C}_W(L^h)$. Weiter ist $\mathbf{C}_V(a) \cap \mathbf{C}_V(b) = \mathbf{C}_V(L^h) \cap \mathbf{C}_V(L^{ht}) = 0$. Also ist $W = \mathbf{C}_W(A) \oplus \mathbf{C}_W(B)$. Per Induktion ist dann $|W| = q^{n2^{m-1}}$ *bzw.* $q^{n2^{m-2}}$. Da $|W| = |\mathbf{C}_V(L)| = |\mathbf{C}_V(L^g)|$ ist, folgt nun $|V| = |W|^2$. Damit ist (ii) bewiesen.

(iii) Wir zeigen zunächst durch Induktion nach m, daß es ein $y \in L$ und ein $z \in L^g$ gibt, die beide vom Typ c_2 sind, so daß $o(yz) = 3$ ist.

Sei zunächst $m = 2$ *bzw.* $m = 3$. Es ist stets $\Omega^-(4, q) \subseteq G$. Da $\Omega^-(4, q) \simeq L_2(q^2)$ und $3 \mid q^2 - 1$ ist, ist die Behauptung für $m = 2$ *bzw.* $m = 3$ richtig. Sei nun $m \geqslant 3$ *bzw.* $m \geqslant 4$. Weiter sei die Behauptung für $m - 1$ bereits bewiesen. Betrachte wie im Beweis von (ii) die Gruppen X, $A \subseteq L^h$ und $B \subseteq L^{ht}$. Dann folgt per Induktion, daß es ein $y \in L^h$ und ein $z \in L^{ht}$ gibt, so daß $o(yz) = 3$ und y vom Typ c_2 ist. Da G transitiv auf den Paaren $\{L^g, L^f\}$ mit $L^g \cap L^f = 1$ ist, folgt nun die Behauptung.

Nach (i) ist $G = \langle L, z \rangle = \langle L^g, y \rangle$. Weiter ist $\mathbf{C}_V(y) \cap \mathbf{C}_V(z) = 0$. Sei nun $u \in U^\#$. Dann ist $u \in \mathbf{C}_V(y)$. Da $u + u^z + u^{zy} \in \mathbf{C}_V(y) \cap \mathbf{C}_V(z) = 0$ ist, folgt

$[u, z] = u^{zy}$. Somit ist $[U, z] = U^{zy} \subseteq \mathbf{C}_V(L^g)$. Setze $X = \mathbf{N}_G(L) \cap \mathbf{N}_G(L^g)$. Dann folgt $L = \langle y^X \rangle$, $L^g = \langle z^X \rangle$. Es wird U von X normalisiert. Wegen $y^{zy} = z$, folgt $L^{zy} = L^g$. Also ist $U^{zy} = U^g$. Somit ist auch U^{zy} ein X-invarianter Teilraum. Sei nun $t \in X$. Dann ist $[U, z^t] = [U, z]^t = U^{gt} = U^g$. Weiter ist $[U^g, y^t] = [U^g, y]^t = U^t = U$. Das zeigt $[U, L^g] \leqslant U^g$ und $[U^g, L] \leqslant U$. Das liefert nun (iii).

(2.2) Lemma. *Sei* $G \simeq Sp_{2m}(q)$, $q > 2$, *und* V *ein unzerlegbarer* F_2G-*Modul. Sei* V_0 *ein Untermodul von* V *mit* $[V, G] \leqslant V_0$. *Ist* V_0 *der natürliche Model, so ist* $|V|/|V_0| \leqslant q$.

Beweis. Siehe [26, (1.5)].

(2.3) Lemma. *Sei* $G/\mathbf{Z}(G) \simeq L_m(q)$, $q = 2^f$, $\mathbf{Z}(G) \leqslant G'$, *und* V *ein treuer* F_qG-*Modul. Es gebe eine Untergruppe* Z *von* G, *die nur aus Transvektionen in der hatürlichen Darstellung von* $SL_m(q)$ *besteht. Es sei* $|Z| = q$, $\mathbf{C}_V(z) = \mathbf{C}_V(Z)$ *und* $[V, z] = [V, Z]$ *für alle* $z \in Z^\#$. *Weiter sei* $|[V, Z]| = q$. *Dann ist* $G \simeq SL_m(q)$ *und* $V = \mathbf{C}_V(G) \oplus V_1$, *wobei* V_1 *der natürliche oder duale Modul ist.*

Beweis. Sei $z \in Z^\#$ und $E(z)$ die zu z gehörige Wurzeluntergruppe von $SL_m(q)$. Wir zeigen zunächst, daß $SL_m(q)$ von m solcher Wurzeluntergruppen erzeugt wird.

Da $SL_2(q)$ von zwei Sylow 2-Untergruppen erzeugt wird, können wir $m \geqslant 3$ annehmen. Weiter sei die Behauptung für $m - 1$ bereits bewiesen. Sei W der natürliche Modul für $SL_m(q)$, $U \subseteq SL_m(q)$, $U \simeq SL_{m-1}(q)$, $W_1 \subseteq W$ der natürliche U—Modul. Weiter sei $W = W_1 \oplus \mathbf{C}_W(U)$. Per Induktion wird U von $m - 1$ Wurzeluntergruppen erzeugt. Sei $R \subseteq SL_m(q)$ eine Wurzeluntergruppe, die $\mathbf{C}_W(U)$ auf $W_2 \subseteq W_1$ abbildet. Also ist $W_1 = \mathbf{C}_{W_1}(R) \oplus W_2$. Sei nun $W_3 \subseteq W$ ein 1-dim. Unterraum. Ist $W_3 \subseteq W_1$, so gibt es ein $t \in U$ mit $W_3{}^t = W_2$. Also ist W_3 zu $\mathbf{C}_W(U)$ in $\langle U, R \rangle$ konjugiert. Sei nun $W_3 \not\subseteq W_1$. Sei weiter $W_3 \neq \mathbf{C}_W(U)$. Dann ist $w_1 + w \in W_3$, $w_1 \in W_1{}^\#$, $w \in \mathbf{C}_W(U)^\#$. Nun gibt es ein $t \in U$ mit $w_1{}^t \in \mathbf{C}_{W_1}(R)$. Somit gibt es ein $r \in R$ mit $(w_1{}^t + w)^r \in W_1$. Also ist W_3 zu einem $W_4 \subseteq W_1$ konjugiert. Das liefert nun wieder $W_3 \sim \mathbf{C}_W(U)$ in $\langle U, R \rangle$. Also ist $\langle U, R \rangle$ transitiv auf den 1-dim. Unterräumen von W. Dann ist $\langle U, R \rangle$ auch transitiv auf den Hyperebenen von W. Also sind Transvektionen zu W_1 in $\langle U, R \rangle$ enthalten. Dann ist aber eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung q^{m-1} mit U in $\langle U, R \rangle$ enthalten. Das liefert nun $\langle U, R \rangle = SL_m(q)$. Also wird $SL_m(q)$ von m Wurzeluntergruppen erzeugt.

Wir zeigen nun, daß wir Z als Wurzeluntergruppe wählen können. Für $m = 2$ ist Z eine Sylow 2-Untergruppe. Insbesondere ist Z eine Wurzeluntergruppe. Sei also $m \geqslant 3$. Setze $H = \langle \mathbf{C}_G(z) \mid z \in Z^\# \rangle$. Es operiert H auf $\mathbf{C}_{V/\mathbf{C}_V(G)}(Z)$ und $[V, Z]\,\mathbf{C}_V(G)/\mathbf{C}_V(G)$. Sei nun Z keine Wurzeluntergruppe. Dann ist $H'/\mathbf{O}_2(H') \simeq SL_{m-1}(q)$ mit irreduzibler Operation auf $\mathbf{O}_2(H')$. Das liefert nun $[V, Z, H'] = 1 = [\mathbf{C}_V(Z), \mathbf{O}_2(H')]$. Weiter ist $[V, \mathbf{O}_2(H')] \leqslant [V, Z]$.

Also gibt es eine Wurzeluntergruppe $E \subseteq \mathbf{O}_2(H')$ mit $[E, V] = [e, V]$ und $\mathbf{C}_V(E) = \mathbf{C}_V(e)$ für alle $e \in E^{\#}$. Indem wir Z durch E ersetzen können wir somit annehmen, daß Z eine Wurzeluntergruppe ist.

Sei nun $G_1 = \langle Z_1, ..., Z_m \rangle$ mit Wurzeluntergruppen Z_i. Setze $V_1 = \prod_{i=1}^m [V, Z_i]$. Dann ist $\dim_{F_q} V_1 \leqslant m$. Da G_1 auf V_1 operiert, folgt nun, daß V_1 der natürliche oder sein dualer $F_q G_1$—Modul ist. Weiter ist $G_1 \cong SL_m(q)$. Wegen der treuen Operation folgt nun auch $G = G_1$.

Setze nun $V_0 = \bigcap_{i=1}^m \mathbf{C}_V(Z_i)$. Dann ist $| V : V_0 | \leqslant q^m$, da $| V : \mathbf{C}_V(Z_i)| = q$ ist. Weiter ist $V_0 \leqslant \mathbf{C}_V(G)$. Also ist $V = V_0 + V_1 = V_1 + \mathbf{C}_V(G) = V_1 \oplus \mathbf{C}_V(G)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(2.4) Lemma. *Sei $G = Sp_{2m}(q)$ oder $\Omega^{\pm}(2m, q)$, $m \geqslant 2$, und V der natürliche $F_q G$—Modul. Dann ist* $\mathrm{Hom}_{F_q G}(V, V) \cong F_q$.

Beweis. Klar.

(2.5) Lemma. *Sei $B \subseteq Q - \mathbf{Z}(Q)$, $B \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G. Dann ist $\mathbf{Z}(Q) \subseteq Q_B = \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_G(B))$. Weiter ist $\mathbf{C}_{Q_B}(\mathbf{Z}(Q)) = \mathbf{Z}(Q) \times Q_0$, wobei Q_0 ein zentrales Produkt von Gruppen vom Typ $L_3(q)$ und $U_3(q)$, $q = |\mathbf{Z}(Q)|$, ist. Weiter ist $| Q_B : \mathbf{C}_{Q_B}(\mathbf{Z}(Q))| = q$.*

Beweis. Nach [25, (2.18)] ist $\langle Q, Q_B \rangle / \mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B \rangle) \cong L_2(q)$. Also ist insbesondere $\mathbf{Z}(Q) \subseteq Q_B$ und $| Q_B : \mathbf{C}_{Q_B}(\mathbf{Z}(Q))| = q$, da $\langle B, \mathbf{Z}(Q) \rangle \trianglelefteq \langle Q, Q_B \rangle$ ist. Sei nun $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Dann ist $| Q_B : \mathbf{C}_{Q_B}(z)| = q$. Die Struktur von Q_B liefert $\mathbf{C}_{Q_B}(z) = Q_1 \times Q_0$, wobei Q_0 die im Lemma angegebene Struktur hat und Q_1 elementar abelsch von der Ordnung q ist. Da $\mathbf{Z}(Q) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{Q_B}(z))$, folgt nun die Behauptung.

(2.6) Lemma. *Sei $t \in Q - \mathbf{Z}(Q)$, $t \sim z \in \mathbf{Z}(Q)$ in G. Dann gibt es ein $B \subseteq Q$, $t \in B$ und $B \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G.*

Beweis. Es sei $t \in B \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G. Da $[t, \mathbf{Z}(Q)] = 1$ ist, ist $\mathbf{Z}(Q) \subseteq \mathbf{N}_G(B)$. Umgekehrt ist auch $B \subseteq \mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(Q))$. Also ist $[B, \mathbf{Z}(Q)] = 1$. Nun folgt $\mathbf{C}_Q(t) \subseteq \mathbf{N}_G(B)$. Sei nun $x \in B - Q$. Es ist $[\mathbf{C}_Q(t), x] \subseteq B \cap Q$. Also ist $|[\mathbf{C}_Q(t)/\mathbf{Z}(Q), x]| < q$. Die Struktur von $\mathrm{Aut}(Q)$, siehe [7], liefert nun $[x, \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant \mathbf{Z}(Q)$. Das liefert dann aber $x \in Q$. Dieser Widerspruch zeigt $B \subseteq Q$.

3. Die Gruppe L_B

Wir führen die folgende Notation ein. Es ist $\overline{M} = M/Q$ und $\tilde{M} = M/\mathbf{Z}(Q)$. Weiter sei $\mathbf{Z}(Q) \neq B \subseteq Q$, $B \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G. Wir setzen $L_B = (Q_B \cap M)Q$, wobei $Q_B = \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_G(B))$ ist. Weiter sei $| Q | = q^{2n+1}$ mit $n > 2$.

Wir sagen, daß eine Involution $\bar{a} \in \bar{M}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ ist, falls $|[\tilde{Q}, \bar{a}]| = q^2$ und $[Q, \bar{a}]$ elementar abelsch ist.

(3.1) LEMMA. *Es gilt eine der folgenden Aussagen:*

(i) *Es gibt kein $\tilde{x} \in \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) - \tilde{B}$ mit $x^2 = 1$.*

(ii) *Es gibt ein $\bar{a} \in \bar{L}_B$ mit $\bar{a}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$.*

Beweis. Sei (i) falsch. Es ist $\tilde{B} \subseteq \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B)$. Nach (2.5) ist $\mathbf{Z}(Q) \subseteq Q_B$. Sei $L_0 = M \cap Q_B$. Da $\mathbf{Z}(Q)$ eine TI-Menge in G ist, folgt $L_0 = \mathbf{Z}(Q) \times Q_0$, wobei Q_0 ein zentrales Produkt von 2-Gruppen vom Typ $L_3(q)$ und $U_3(q)$ ist. Es ist $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B) = \widetilde{\mathbf{Z}(Q_0)}$ von der Ordnung q. Sei C das volle Urbild von $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B)$ in Q. Dann operiert C auf L_0, da $[C, \mathbf{Z}(Q_0)] = 1$ ist. Sei $x \in Q$, $\tilde{x} \in \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) - \widetilde{\mathbf{Z}(Q_0)}$. Dann ist $x \in \mathbf{C}_Q(B) - Q_B$. Weiter ist $[L_0, x] \leqslant \mathbf{Z}(Q)$. Also ist $| Q_B : \mathbf{C}_{Q_B}(x)| \leqslant q^2$. Sei nun $x^2 = 1$ und $r \in Q_B$, $o(r) = 4$, $x \sim xr$ in Q_B. Dann gibt es ein $b \in B^{\#}$ mit $x \sim xb$ in $Q_B \cap M$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $[Q_B, x]$ elementar abelsch. Die Struktur von Aut(Q) [7, Satz 4; 5, Sekt. 8] liefern nun $|[Q_B/B, x]| = q^2$. Also ist x vom Typ a_2 auf Q_B/B. Da es nach [25, (2.18)] ein Element $g \in G$ mit $\mathbf{Z}(Q)^g = B$ und $B^g = \mathbf{Z}(Q)$ gibt, erhalten wir nun (ii).

(3.2) LEMMA. *Es ist $Q_B \cap Q$ elementar abelsch.*

Beweis. Es ist $\mathbf{Z}(Q) \subseteq Q_B$ und $\mathbf{C}_{Q_B}(\mathbf{Z}(Q)) = \mathbf{Z}(Q) \times Q_0$ mit $\mathbf{Z}(Q_0) = (Q_0)' = B$.

(3.3) LEMMA. *Es gilt eine der folgenden Aussagen:*

(i) $|\bar{L}_B| = q^{n-1}$.

(ii) *Es gibt ein $\bar{a} \in \bar{L}_B$, $\bar{a}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$.*

Beweis. Nach (3.2) ist $Q \cap Q_B$ elementar abelsch. Also ist $| Q \cap Q_B | \leqslant q^{n+1}$. Somit ist $|\bar{L}_B| \geqslant q^{n-1}$. Setze $L_0 = Q_B \cap M$. Dann ist $|L_0| = q^{2n}$. Sei nun $|\bar{L}_B| > q^{n-1}$. Dann ist $|\widetilde{Q \cap Q_B}| < q^{n+1}$. Also ist $|Q \cap Q_B| < q^n$. Setze $\bar{A} = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{Q \cap Q_B})$. Dann ist $\bar{A} \neq 1$. Es ist $[L_B, \mathbf{C}_Q(B)] = [Q(Q_B \cap M), \mathbf{C}_Q(B)] \leqslant \mathbf{Z}(Q)[Q_B \cap M, \mathbf{C}_Q(B)] \leqslant \mathbf{Z}(Q)(Q \cap Q_B) \leqslant Q \cap Q_B$. Also ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}, \bar{L}_B, \bar{A}] \leqslant [\widetilde{Q \cap Q_B}, \bar{A}] = 1$. Das 3-Untergruppenlemma liefert nun $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}, \bar{A}, \bar{L}_B) = 1$. Somit ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}, \bar{A}] \leqslant \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B)$. Da $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist, folgt $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}, \bar{A}] \leqslant \tilde{B}$. Sei nun $\bar{x} \in \bar{A}$ mit $[\bar{x}, \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}] = 1$. Es ist $\mathbf{C}_Q(B) = B \times Q_1$. Es operiert $\bar{x}$ auf $\tilde{Q}_1$. Also ist $Q_2 = \mathbf{C}_Q(Q_1)$ ebenfalls x-invariant. Es ist Q_2 vom Typ $L_3(q)$. Wegen $[\tilde{B}, \bar{x}] = 1$, folgt nun $[\tilde{Q}_2, \bar{x}] = 1$. Also ist $[\tilde{Q}, \bar{x}] = 1$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $[\bar{x}, \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}] \neq 1$ für alle $\bar{x} \in \bar{A}^{\#}$. Identifiziere nun $\tilde{Q}$ mit dem $2n$-dimensionalen orthogonalen Raum über F_q und $\bar{A}$ mit einer Untergruppe von $\mathbf{O}(\tilde{Q})$, der orthogonalen Gruppe. Sei N der Stabilisator von $\tilde{B}$. Dann folgt nun $\bar{A} \subseteq \mathbf{O}_2(N)$. Da A keine Involutionen vom Typ a_2 enthält, folgt nun $|\bar{A}| \leqslant q^2$. Nach [25, (2.18)] ist $\langle Q, Q_B\rangle/\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle) \cong L_2(q)$. Weiter ist $[Q \cap Q_B, \langle Q, Q_B\rangle] \leqslant \langle \mathbf{Z}(Q), B\rangle$. Setze $X = \mathbf{C}_{\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)}(Q \cap Q_B)$. Dann ist $X \leqslant \langle Q, Q_B\rangle$. Weiter ist $X > Q \cap Q_B$. Sei $r \in \langle Q, Q_B\rangle$ mit $Q^r = Q_B$ und $Q_B{}^r = Q$. Dann ist $|\mathbf{C}_{\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)/Q \cap Q_B}(r)| = (|\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)/Q \cap Q_B|)^{1/2}$. Also operieren Elemente ungerader Ordnung aus $\langle Q, Q_B\rangle$ fixpunktfrei auf $(\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)/Q \cap Q_B)^{\#}$. Sei nun zunächst $|\bar{A}| \leqslant q$. Dann ist $|X/Q \cap Q_B| \leqslant q^2$. Also ist $X/Q \cap Q_B$ der natürliche Modul für $\langle Q, Q_B\rangle/\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)$. Sei zunächst X elementar abelsch. Es ist $[\bar{A}, Q] \leqslant X$. Also enthält nun $\bar{A}$ Involutionen vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $Q \cap Q_B = \Omega_1(X)$. Die Struktur von Q liefert nun aber $|\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_B)/Q \cap Q_B| > q$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|\bar{A}| > q$. Dann liefert die Operation von $L_2(q)$, daß $|\bar{A}| = q^2$ und $|Q \cap Q_B| = q^n$ ist.

Die Struktur von $O(\tilde{Q})$ liefert $\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)} \subseteq \bigcup_{\bar{t} \in \bar{A}^{\#}} \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t})$. Sei nun $C \sim B$ in $\overline{M}$, $C \subseteq \mathbf{C}_Q(B) - Q_B$. Dann gibt es ein $\bar{t} \in \bar{A}^{\#}$ mit $C_C(t) \neq 1$. Nach [7] gibt es in $\mathrm{Aut}(Q)$ ein Element ρ, $o(\rho) = q - 1$, das fixpunktfrei auf $\tilde{Q}^{\#}$ ist. Weiter ist $[C_{\mathrm{Aut}(Q)}(\mathbf{Z}(Q)), \rho] \leqslant \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Also operiert ρ auf $\tilde{B}$ nach (3.1). Dann folgt, daß ρ auch auf $\tilde{C}$ operiert. Da $[\bar{t}, \rho] \in \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$, folgt nun $[C, t] = 1$. Da $\bar{t}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{Q}$ ist, folgt nun $[\widetilde{Q \cap Q_C}, \bar{t}] \leqslant \widetilde{Q \cap Q_C} \cap \tilde{B}$. Da $C \nleqslant Q_B$ ist, ist $B \nleqslant Q_C$. Also ist $[Q \cap Q_C, \bar{t}] = 1$. Da $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t}) \subseteq \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}$ ist, folgt nun $Q \cap Q \subseteq \mathbf{C}_Q(B)$. Somit ist $(Q \cap Q_C)B$ elementar abelsch. Da $|(Q \cap Q_C)B| > q^n$ ist, folgt nun, daß Q ein zentrales Produkt von 2-Gruppen vom Typ $L_3(q)$ ist. Weiter ist $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_B) = (Q \cap Q_B)Y$, wobei Y vom Typ $L_3(q)$ ist. Setze $Y = \langle A_1, B_1\rangle$ mit $A_1\mathbf{Z}(Q) \cong E_{q^2} \cong B_1\mathbf{Z}(Q)$. Sei nun $\bar{s} \in \bar{A}^{\#}$ und $\tilde{x} \in \tilde{Q} - \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}$. Dann ist $[\mathrm{t}, \tilde{x}]$ nicht singulär. Also ist $[\bar{s}, \tilde{x}] \in \{\tilde{a}_1\tilde{b}_1(\widetilde{Q \cap Q_B}) \mid \tilde{a}_1 \in (\tilde{A}_1)^{\#}, \tilde{b}_1 \in (\tilde{B}_1)^{\#}\}$. Es ist $|\{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 \mid \tilde{a}_1 \in (\tilde{A}_1)^{\#}, \tilde{b}_1 \in (\tilde{B}_1)^{\#}\}| = (q-1)^2$. Da $q^2 - 1 > (q-1)^2$ ist, gibt es ein $\mathrm{t} \in \bar{A}^{\#}$ mit $[\mathrm{t}, \tilde{x}] \in \widetilde{Q \cap Q_B}$. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir $B^M \cap \mathbf{C}_Q(B) \subseteq Q \cap Q_B$ gezeigt.

Sei nun $C \in B^M \cap \mathbf{C}_Q(B)$, $C \nleqslant \mathbf{Z}(Q)B$. Sei $D \in B^M \cap Q$ mit $[D, B] \neq 1$. Sei zunächst auch $[C, D] \neq 1$. Es operiert D auf $BC\mathbf{Z}(Q)$. Ist $x \in B\mathbf{Z}(Q) - \mathbf{Z}(Q)$, so ist $x \sim b \in B^{\#}$ in Q. Also sind alle Element aus $BC\mathbf{Z}(Q)$ in G konjugiert. Da D eine TI—Menge in G ist, gibt es ein $B_1 \in B^M \cap BC\mathbf{Z}(Q)$ mit $[B_1, D] = 1$. Somit haben wir gezeigt, daß jedes $D \in B^M \cap Q$ in Q_{B_1}, für geeignetes $B_1 \in B^M \cap BC\mathbf{Z}(Q)$, enthalten ist. Da B, D in $(B_1)^M \cap \mathbf{C}_Q(B_1)$ enthalten sind, folgt $\langle D, B\rangle \subseteq Q \cap Q_{B_1}$. Also ist $[B, D] = 1$. Das liefert nun, daß $\langle B^M\rangle$ abelsch ist. Das ist aber ein Widerspruch. Somit haben wir $B^M \cap \mathbf{C}_Q(B) \subseteq \mathbf{Z}(Q)B$ gezeigt.

Sei nun $h \in \bar{M}$ mit $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \neq \bar{L}_B$ und $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{L}_B \neq 1$. Dann gibt es ein $t \in M \cap Q_B$ mit $\bar{t} \in (\bar{L}_B \cap \bar{L}_B{}^{\bar{h}})^{\#}$. Es ist $[t, B] = 1$. Sei $\tilde{B}^{\bar{h}} = \tilde{B}$. Dann ist $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} = \bar{L}_B$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $[B, B^{\bar{h}}] \neq 1$. Wir können $[B^{\bar{h}}, \bar{t}] = 1$ annehmen. Sei $b \in B^{\#}$. Dann ist $t \in (Q_b)^{b^h} = Q_{bz}$ für ein $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Aber $bz \sim b(bz) = z$ in $C_{Q_B}(t)$. Also ist $t \in Q_z = Q$. Das ist ein Widerspruch.

Somit haben wir gezeigt, daß $\bar{L}_B$ eine TI—Menge in $\bar{M}$ ist. Nach (3.1) ist $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Nach [20, (5.7)] operiert $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ transitiv auf $(\bar{L}_B)^{\#}$, da $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$ ist. Somit ist $[\bar{L}_B, \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}] \leqslant \tilde{B}$. Da $\bar{L}_B$ keine Involutionen vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ enthält, folgt nun $|\bar{L}_B| = q^2$. Also ist $q^n \leqslant |\bar{L}_B| \leqslant q^2$. Das liefert den Widerspruch $n \leqslant 2$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(3.4) Lemma. *Es enthalte $\bar{L}_B$ keine Involution vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$. Sei $X \leqslant \mathbf{C}_Q(B)$ mit $[\tilde{X}, \bar{L}_B] \leqslant \tilde{B}$. Dann ist $X \leqslant Q \cap Q_B$.*

Beweis. Sei $X \nleqslant Q \cap Q_B$. Es operiert X auf Q_B. Also gibt es ein $x \in X - Q_B$ mit $|[Q_B/B, x]| \leqslant q^2$. Es folgt, daß x vom Typ c_2 auf Q_B/B ist. Also gibt es in $\bar{L}_B$ Involutionen vom Typ c_2. Sei $\bar{A} \leqslant \bar{L}_B$ maximal, so daß alle Involutionen aus $\bar{A}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{Q}$ sind. Die Struktur von $O(\tilde{Q})$ liefert $|\bar{A}| \leqslant q^2$. Sei zunächst $|\bar{A}| > q$.

Sei $x \in Q$, $x \sim b \in B^{\#}$ in M. Sei weiter $x \in \mathbf{C}_Q(B) - Q_B$. Dann gibt es ein $\bar{a} \in \bar{A}^{\#}$ mit $[\bar{a}, \tilde{x}] = 1$. Also ist $[\widetilde{Q \cap Q_x}, \bar{a}] \leqslant \widetilde{B \cap Q_x} \cap Q = 1$. Es folgt $\widetilde{Q \cap Q_x} \subseteq \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{a}) \subseteq \widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}$. Nach (3.3) ist aber $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_x) = Q \cap Q_x$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $B^M \cap \mathbf{C}_Q(B) \subseteq Q \cap Q_B$. Sei nun wieder $x \sim b \in B^{\#}$ in M mit $x \notin B\mathbf{Z}(Q)$. Dann ist $x \sim xb \sim b$ in M. Sei nun $C \sim B$ in M. Dann ist $\mathbf{C}_Q(C) \cap \langle B, x\rangle \neq 1$. Also ist $C \leqslant Q_B$ oder $C \leqslant Q_{xb}$ mit geeigneten $b \in B$. Das liefert nun den Widerspruch, daß $\langle B^M\rangle$ abelsch ist.

Somit ist $B^M \cap \mathbf{C}_Q(B) \subseteq B\mathbf{Z}(Q)$. Sei nun $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \neq \bar{L}_B$ und $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{L}_B \neq 1$. Dann gibt es ein $t \in Q_B \cap M$ mit $\bar{t} \in (\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{L}_B)^{\#}$. Wir erhalten $[B, B^{\bar{h}}] \neq 1$. Weiter können wir $[t, B] = [t, B^{\bar{h}}]$ annehmen. Nach [25, (2.18)] ist $\langle Q, Q_B\rangle/\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle) \cong L_2(q)$. Weiter folgt für jedes $s \in Q - \mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)$, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B\rangle)/Q \cap Q_B}(s) \subseteq Q/Q \cap Q_B$ ist. Das liefert nun $t \in Q$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\bar{L}_B$ eine TI—Menge in $\bar{M}$. Nach (3.1) ist $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Anwendung von [20, (5.7)] liefert nun, daß $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ transitiv auf $(\bar{L}_B)^{\#}$ ist. Also ist $\bar{L}_B = \bar{A}$. Nach (3.3) ist dann $n = 3$. Weiter ist $q^2 \geqslant 16$. Somit liefert [20], daß $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle/\mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle)$ zu $L_m(r)$, $Sz(r)$, $U_3(r)$, M_{22}, M_{23} oder M_{24} isomorph ist.

Ist $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle/\mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle) \cong M_{22}$, M_{23} oder M_{24}, so ist $q = 4$. Also ist $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle \leqslant SO^+(6, 4)$. Aber $11 \nmid |SO^+(6, 4)|$.

Somit ist $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle/\mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle)$ zu $L_m(r)$, $Sz(r)$ oder $U_3(r)$ isomorph. Da $Sz(q^2)$ und $U_3(q^2)$ nicht in $SO^+(6, q)$ enthalten sind, folgt nun $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle/\mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}}\rangle) \cong L_2(q^2)$ oder $L_3(q)$.

Sei zunächst $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q^2)$. Nach [10] gibt es $X_1, X_2 \leqslant Q$ mit $1 \leqslant \tilde{X}_1 < \tilde{X}_2 \leqslant \tilde{Q}$ und $[\tilde{X}_1, \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle] = 1 = [Q/X_2, \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle]$. Weiter ist $| X_2/X_1 | = q^4$. Es ist $Q = \langle B^M \rangle$. Also folgt mit (3.3), daß $X_2 = Q$ ist. Weiter wissen wir, daß es ein $\tau \in \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$ mit $o(\tau)$ ungerade und $\mathbf{C}_Q(\tau) = X_1$ gibt. Dann ist $Q = X_1[Q, \tau]$ mit $[X_1, [Q, \tau]] = 1$. Es ist $X_1 = \mathbf{C}_Q([Q, \tau])$. Also operiert $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$ auf $[Q, \tau]$. Das liefert nun $[Q, \tau] = \langle B^M \rangle$. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle / \mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle) \cong L_3(q)$. Nach [10] gibt es in $\tilde{Q}$ eine Untergruppe $\tilde{X}_1$, so daß $| \tilde{X}_1 | = q^3$ ist. Weiter ist $\tilde{X}_1$ unter $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$ invariant. Nun folgt mit (3.1) $\tilde{B} \subseteq \tilde{X}_1$. Also ist $\langle B^M \rangle = X_1$, da $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in einer Sylow 2 Untergruppe von $\bar{M}$ ist. Aber $X_1 \neq Q$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $| \bar{A} | \leqslant q$. Es ist $\bar{A}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ bezüglich $\bar{M}$. Bilde wieder $\langle Q, Q_B \rangle$. Nach Annahme ist $\mathbf{Z}(\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B \rangle)/B\mathbf{Z}(Q)) \nsubseteq Q \cap Q_B/B\mathbf{Z}(Q)$. Also ist nach [25, (2.18)] $\mathbf{Z}(\mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B \rangle)/B\mathbf{Z}(Q))/(Q \cap Q_B/B\mathbf{Z}(Q))$ $L_2(q)$-invariant. Das liefert nun $| \bar{A} | = q$.

Sei wieder $x \in \mathbf{C}_Q(B)$, $x \sim b \in B^{\#}$ in M. Sei weiter $a \in \bar{A}^{\#}$ mit $[\bar{a}, \tilde{x}] = 1$. Ist $x \notin Q_B$, so erhalten wir wie oben einen Widerspruch. Also gilt stets $x \in Q_B$ oder $[\tilde{x}, \bar{A}] = \tilde{B}$. Insbesondere ist $xB \subsetneq x^M$. Sei nun $b \in B^{\#}$ und $\mathscr{Y} = b^M \cap Q_B$. Dann folgt $\langle \tilde{\mathscr{Y}} \rangle^{\#} = \tilde{\mathscr{Y}}$.

Sei zunächst $|\langle \tilde{\mathscr{Y}} \rangle| > q^2$. Sei $E \sim B$ in M mit $[E, B] \neq 1$. Dann ist $|\langle \widetilde{\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}(E)} \rangle| > q$. Sei $g \in M$ mit $b^g = e$. Sei weiter $\bar{a} \in \bar{A}^{\#}$. Dann operiert $\bar{a}^g$ auf $\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}(e)E$. Also ist $\mathbf{C}_{\langle \widetilde{\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}(E)} \rangle}(\bar{a}^g) \neq 1$. Dann ist aber sogar $\widetilde{\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}(E) \cap Q_E} \neq 1$. Sei $\tilde{f} \in \widetilde{\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}(E) \cap Q_E}$. Dann ist $\langle E, B \rangle \subseteq Q_f$ nach (2.5). Das widerspricht aber $[B, E] = \mathbf{Z}(Q)$. Also ist $|\langle \tilde{\mathscr{Y}} \rangle| \leqslant q^2$.

Sei nun $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $[\bar{A}^{\bar{g}}, \bar{A}] = 1$. Es ist $\mathbf{Z}(Q)B^{\bar{g}} = \Omega_1([Q, \bar{A}^{\bar{g}}])$. Also ist $\bar{A} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B{}^{\bar{g}})$. Somit ist $\tilde{B}^{\bar{g}} \subseteq \widetilde{Q \cap \mathbf{C}(B)}$. Weiter ist $[\tilde{B}^{\bar{g}}, \bar{A}] = 1$. Also ist $\tilde{B}^{\bar{g}} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Das zeigt nun $\tilde{B}^{\bar{g}} \subsetneq \langle \tilde{\mathscr{Y}} \rangle$. Da $| \tilde{B} | = q$ und $|\langle \tilde{\mathscr{Y}} \rangle| \leqslant q^2$ ist, folgt nun $| \bar{A}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{A})| \leqslant q + 1$, da $\bar{A}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ ist. Es ist $\bar{A}^{\bar{g}} \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Sei $\bar{a}^{\bar{g}} \in \bar{A}^{\bar{g}}$. Dann folgt nun $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{a}^{\bar{g}})| \leqslant q$. Also ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{B}^{\bar{g}})| \leqslant q$. Da $B^{\bar{g}} \subseteq Q \cap Q_B$ ist, folgt $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{B}^{\bar{g}})| = q$. Somit ist dann auch $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{a}^{\bar{g}})| = q$. Das liefert nun $\bar{A}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{A}) \leqslant \bar{L}_B \bar{A}^{\bar{g}}$. Weiter ist $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{a}^{\bar{g}}) = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{A}^{\bar{g}})$. Nun folgt $\langle \bar{A}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{A}) \rangle' = 1$.

Sei nun $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{A}^{\bar{h}} \cap \bar{A} \neq 1$. Dann ist für $\bar{t} \in (\bar{A}^{\bar{h}} \cap \bar{A})^{\#}$ $\tilde{B} = \Omega_1([\bar{t}, \tilde{Q}]) = \tilde{B}^{\bar{h}}$. Also ist $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{A})$. Somit ist $\bar{A}$ eine *TI*-Menge in $\bar{M}$. Da $\bar{A}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ und $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ ist, enthält $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{A})$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$. Nach [21, Korollar 2] ist dann $\langle \bar{A}^{\bar{M}} \rangle / \mathbf{Z}(\langle \bar{A}^{\bar{M}} \rangle)$ zu $L_r(2^m)$, $Sz(2^m)$, $U_3(2^m)$, A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23} oder M_{24} isomorph. Da $\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_M(\langle \bar{A}^{\bar{M}} \rangle)) = 1$ ist, induziert $\bar{L}_B$ nicht triviale Automorphismen auf $\langle \bar{A}^{\bar{M}} \rangle$. Die Struktur von $\langle \bar{A}^{\bar{M}} \rangle$ zusammen mit $q > 2$ liefert nun $\bar{A} = \bar{L}_B$. Dann folgt aber mit (3.3) der Widerspruch $n = 2$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Zusammenfassend erhalten wir nun:

(3.5) SATZ. *Enthalt $\bar{L}_B$ kein $\bar{x}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$, so gilt:*

(1) *$\bar{L}_B$ ist schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$.*

(2) $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$.

(3) $|\bar{L}_B| = q^{n-1}$, $|Q \cap Q_B| = q^{n+1}$. *Q ist ein zentrales Produkt von 2-Gruppen vom Typ $L_3(q)$.*

Beweis. (1) folgt sofort aus (3.1). Weiter ist (3) die Aussage von (3.3) und (3.2). Nach (3.4) und [25, (2.18)] ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Mit (3.1) und (3.2) erhalten wir dann (3).

(3.6) LEMMA. *Sei $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B) \neq 1$. Dann ist $[B, B^{\bar{h}}] = 1$.*

Beweis. Sei $[B, B^{\bar{h}}] \neq 1$. Dann gibt es ein $x \in (Q_B \cap M)^h$ mit $1 \neq \bar{x} \in \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Es ist $\tilde{B}^{\bar{x}} = \tilde{B}$ nach (3.5). Also ist $[B, x] \leqslant B\mathbf{Z}(Q)$. Die Struktur von Aut$(Q)$ [7, Satz 4] liefert nun $[B, x] \leqslant \mathbf{Z}(Q)$. Sei $b \in B$ mit $b^x = bz$, $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Dann ist $x = (zx)^b \in (Q_{h^{-1}bh})^b = Q_{h^{-1}hbs}$ mit $(b^h)^b = b^h s$. Da unter B alle Elemente aus $b^h\mathbf{Z}(Q)$ konjugiert sind, folgt nun $x \in \bigcap_{t \in \mathbf{Z}(Q)} Q_{h^{-1}bht}$. Es ist $b^h t \sim b^h(b^h t) = t$ in $Q_{h^{-1}bh}$, für $t \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Somit ist dann sogar $b^h t \sim t$ in $\mathbf{C}(x)$. Also ist $x \in Q$. Das ist ein Widerspruch.

(3.7) SATZ. *Sei $\bar{L}_B$ eine TI–Menge in $\bar{M}$. Dann ist $n = 4$ und $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle = \mathbf{E}(\bar{M}) \cong L_2(q^3)$.*

Beweis. Setze $\bar{M}_0 = \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$. Es ist $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ nach (3.5)(1). Weiter ist $|\bar{L}_B| = q^{n-1} \geqslant 16$. Somit ist nach [20], $\bar{M}_0/\mathbf{Z}(\bar{M}_0)$ zu $L_m(r)$, $Sz(r)$, $U_3(r)$, M_{22}, M_{23} oder M_{24} isomorph. Ist $\bar{M}_0/\mathbf{Z}(\bar{M}_0) \cong M_{22}$, M_{23} oder M_{24}, so ist $q^{n-1} = |\bar{L}_B| = 16$. Also ist $n = 3$ und $q = 4$. Aber $11 \nmid |O^+(6, 4)|$.

Sei $\bar{M}_0/\mathbf{Z}(\bar{M}_0) \cong L_m(r)$, $m \geqslant 3$. Ist $\bar{h} \in \bar{M}_0$, so ist stets $\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \mathbf{N}_{\bar{M}_0}(\bar{L}_B) \neq 1$. Somit ist nach (3.6), $\langle B^{M_0} \rangle$ abelsch. Da $\bar{L}_B^{\bar{M}_0} = \bar{L}_B{}^{\bar{M}}$ ist, folgt nun, daß $\langle B^M \rangle$ abelsch ist. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $\bar{M}_0/\mathbf{Z}(\bar{M}_0)$ eine Bendergruppe. Sei nun $\bar{S} \in \mathrm{Syl}_2(\bar{M}_0)$. Dann ist $\bar{L}_B = \Omega_1(\bar{S})$. Also ist $\bar{M}_0/\mathbf{Z}(\bar{M}_0) \cong L_2(q^{n-1})$, $Sz(q^{n-1})$ oder $U_3(q^{n-1})$. Sei $q = 2^m$. Sei $\bar{M}_0 \not\cong L_2(q^{n-1})$. Nach [1, Korollar 2, p. 358] gibt es dann in $\bar{M}_0$ ein Element τ von Primzahlordnung, so daß $o(\tau) \mid 2^{m(4n-4)} - 1$ bzw. $2^{m(6n-6)} - 1$ aber $o(\tau) \nmid 2^x - 1$ für $x < m(4n - 4)$ bzw. $x < m(6n - 6)$. Dann ist aber $\tau \notin GL_{2nm}(2)$. Also kann dann $\bar{M}_0$ nicht auf $\tilde{Q}$ operieren. Somit haben wir $\bar{M}_0 \cong L_2(q^{n-1})$ gezeigt.

Nach [7] gibt es in Aut(Q) ein Element ρ der Ordnung $q - 1$, das fixpunktfrei auf $\tilde{Q}^{\#}$ operiert. Weiter ist $[\bar{M}_0, \rho] \leqslant \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Nach [18, II(3.11)] ist nun $\tilde{Q}$ ein $F_q\bar{M}_0$-Modul. Nach (3.5) ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 von $\bar{S}$ auf $\tilde{Q}$

eindimensional. Sei nun L ein Zerfällungskörper für $\bar{M}_0$ und $\tilde{V}$ ein irreduzibler Untermodul von $\tilde{Q}$. Dann ist $\tilde{V} \otimes_{F_q} L$ vollständig reduzibel. Da der Eigenraum zum Eigenwert 1 von $\bar{S}$ auf $\tilde{V} \otimes_{F_q} L$ die Dimension Eins hat, ist $\tilde{V} \otimes_{F_q} L$ irreduzibel. Nach [9] ist $\tilde{V} \otimes_{F_q} L = V_1 \otimes \cdots \otimes V_i$, wobei die V_j algebraisch Konjugierte des natürlichen Moduls sind. Es ist V absolut irreduzibel und über F_q realisierbar. Wegen $|\operatorname{Aut}_{F_q}(F_{q^{n-1}})| = n - 1$, folgt $n - 1 \mid i$. Somit ist $2n = \dim_{F_q}(\tilde{Q}) \geqslant \dim_{F_q}(\tilde{V}) = \dim_{F_{q^{n-1}}}(\tilde{V} \otimes_{F_q} L) = 2^i = 2^{x(n-1)}$. Das liefert nun $n \leqslant 4$. Ist $n = 4$, so haben wir die Behauptung. Sei also $n = 3$. Dann ist $\tilde{V} \neq \tilde{Q}$. Aber $\tilde{V} \lhd \tilde{M}$. Also ist $V = \langle B^M \rangle < Q$. Das ist ein Widerspruch.

(3.8) LEMMA. *Sei $\bar{h} \in \bar{M} - \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$, $\bar{X} = \langle \bar{L}_B, \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \rangle$, $\bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X}) \neq 1$ und $\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine TI-Menge in $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$. Dann ist $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ zu $L_2(q)$ oder $L_2(q^2)$ isomorph.*

Beweis. Setze $\tilde{U} = \langle \tilde{B}^{\bar{X}} \rangle$. Nach (3.6) ist dann U abelsch. Sei gemäß [7], $\rho \in \operatorname{Aut}(Q)$, $o(\rho) = q - 1$, mit $[\mathbf{C}_{\operatorname{Aut}(Q)}(\mathbf{Z}(Q)), \rho] \leqslant \mathbf{C}_{\operatorname{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Dann ist $[\bar{X}, \rho] \leqslant \mathbf{C}_{\operatorname{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Nach [18, II(3.11)] ist dann $\tilde{U}$ ein $F_q\bar{X}$-Modul. Da $\mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist, folgt, daß $\tilde{U}$ ein irreduzibler $\bar{X}$-Modul ist. Weiter ist $[\tilde{U}, \bar{L}_B] \leqslant \widetilde{U \cap Q_B}$. Es ist $\tilde{U} = [\tilde{U}, \bar{L}_B][\tilde{U}, \bar{L}_B{}^{\bar{h}}]$. Die Struktur von L_B liefert nun $|[\tilde{U}, \bar{L}_B]| \leqslant q\,|\bar{L}_B : \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X})|$. Nach (3.5)(1) ist $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Also ist $\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{C}_{\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})}(\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X}))$. Nun folgt mit [20], daß $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung einer Gruppe ungerader Ordnung mit $Sz(r)$, $U_3(r)$, $L_m(r)$, A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24} oder eine Diedergruppe D_{2u}, u ungerade, ist.

Sei zunächst $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung mit $Sz(r)$ oder $U_3(r)$. Dann ist $r = |\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})|$. Somit ist $|\tilde{U}| \leqslant q^2r^2$. Das liefert nun $r = q$ und $|\tilde{U}| = q^4$. Weiter ist dann $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cong Sz(q)$. Die Struktur von $Sz(q)$ liefert nun $[\bar{L}_B, [\bar{L}_B, \tilde{U}]] = 1$. Da $|[\bar{L}_B, \tilde{U}]| = q^2$ ist, ist das ein Widerspruch.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cong L_m(r)$. Da $\bar{X}$ von $\bar{L}_B$ und $\bar{L}_B{}^{\bar{h}}$ erzeugt wird, folgt nun $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cong L_2(r)$ mit $r = |\bar{L}_B : \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X})|$. Sei $\bar{s} \in \bar{L}_B - \mathbf{O}_2(\bar{X})$ mit $[\bar{s}, [\tilde{U}, \bar{L}_B]] = 1$. Dann liefert die Struktur von $\bar{X}$, daß $[\bar{L}_B, [\tilde{U}, \bar{L}_B]] = 1$ ist. Also ist $\tilde{B} = [\tilde{U}, \bar{L}_B]$. Insbesondere ist $|\tilde{U}| = q^2$. Nach (3.4) ist $\tilde{U} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Also ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X}) = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{U})$. Das liefert $r = q$ und $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cong L_2(q)$. Also können wir annehmen, daß es kein solches $\bar{s}$ gibt. Dann ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X}) = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{U \cap Q_B})$. Also ist $r = q^x$ für geeignetes x. Wie in (3.7) erhalten wir, daß $\tilde{U}$ ein absolut irreduzibler $F_q\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$-Modul ist. Ist L ein Zerfällungskörper für $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$, so folgt wieder mit [9], daß $\tilde{U} \otimes_{F_q} L \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_i$, wobei die V_j algebraisch konjugierte des natürlichen Moduls sind. Da $\tilde{U}$ über F_q realisierbar ist, folgt nun wieder $x \mid i$. Somit ist $\dim_{F_q}(\tilde{U}) = 2^{xr}$ mit geeigneten r. Weiter ist $|\tilde{U}| \leqslant q^2q^{2x}$. Also ist $\dim_{F_q}(\tilde{U}) \leqslant 2(x + 1)$. Somit ist $x = 1, 2$ oder 3. Ist $x = 1$ oder 2, so haben wir die Aussage des Lemmas. Also können wir $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cong L_2(q^3)$ annehmen. Weiter ist $|\tilde{U}| = q^8$. Nun ist $|[\tilde{U}, \bar{L}_B]| \leqslant q^4$. Ist $\bar{s} \in \bar{L}_B -$

$\mathbf{O}_2(\bar{X})$, so folgt stets $|[\tilde{U}, \bar{s}]| \geqslant q^3$. Da $[\bar{L}_B, [\tilde{U}, \bar{L}_B]] \neq 1$ ist, folgt $|[\tilde{U}, \bar{s}]| = q^3$. Sei nun $\bar{y} \in \bar{X}$, $o(\bar{y}) \mid q^3 + 1$ und $o(\bar{y})$ prim. Sei weiter $\bar{y}^{\bar{s}} = \bar{y}^{-1}$. Dann folgt nun $[\mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{y}), \bar{s}] = 1$. Sei $\bar{y}_1 \in \bar{X}$, $o(\bar{y}_1) = q^3 + 1$, mit $\bar{y}_1^{\bar{s}} = \bar{y}_1^{-1}$ und $\bar{y} \in \langle \bar{y}_1 \rangle$. Dann folgt nun $[\mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{y}), \bar{y}_1] = 1$. Also ist für jedes $\tilde{u} \in \mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{y})^{\#}$ stets $\mathbf{C}_{\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})}(\bar{u}) = \langle \bar{y}_1, \bar{s} \rangle$. Also hat $\tilde{u}$ genau $(q^3 - 1)q^3/2$ Konjugierte under $\bar{X}$. Weiter sind zwei verschiedene $\tilde{u}$ aus $\mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{y})$ in $\bar{X}$ nicht konjugiert. Es ist $(q^2 - 1)(q^3 - 1)q^3/2 = (q^8 - q^5 - q^6 + q^3)/2 > q^4 - 1$. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine Diedergruppe. Wegen $\mathbf{C}_{\tilde{U}}(\bar{L}_B)$ erhalten wir nun $[\bar{L}_B, \tilde{U}] \leqslant \tilde{B}$. Also ist nach (3.4) $\tilde{U} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Das liefert dann aber den Widerspruch $|\bar{L}_B : \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X})| \geqslant q > 2$.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung mit A_6 oder A_7. Dann folgt $|\bar{L}_B/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \cap \bar{L}_B| = 4$. Es folgt nun $q = 4$, da $\bar{X} \not\subseteq L_2(q)$ ist. Also ist $2^6 \leqslant |\tilde{U}| \leqslant 2^8$. Nun liefert aber die Struktur von Q_B, daß $\mathbf{C}_{\widetilde{U \cap Q_B}}(\bar{s}) = \mathbf{C}_{\widetilde{U \cap Q_B}}(\bar{L}_B)$ für jedes $\bar{s} \in \bar{L}_B - \mathbf{O}_2(\bar{X})$ ist. Also ist $[\tilde{U}, \bar{s}] = \tilde{B} = [\tilde{U}, \bar{L}_B]$. Dann folgt aber der Widerspruch $|\tilde{U}| = 2^4$.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung von A_8 oder A_9. Da $A_8 \cong GL_4(2)$ ist haben wir diesen Fall schon behandelt. Da A_9 eine zu $L_2(8)$ isomorphe Untergruppe enthält, die von zwei Konjugierten von $\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ erzeugt wird, erhalten wir nun wie oben $q = 8$. Also ist $|\tilde{U}| \leqslant q^4$. Die Sylow 3-Untergruppen von $L_4(8)$ sind abelsch. Insbesondere ist A_9 keine Untergruppe von $L_4(8)$ aber $|\tilde{U}| = q^2$, q^3 oder q^4. Das ist ein Widerspruch.

Sei zuletzt $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung mit M_{22}, M_{23} oder M_{24}. Dann ist $|\bar{L}_B : \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\bar{X})| = 2^4$. Somit ist $|\tilde{U}| \leqslant q^2 2^8$. Da M_{22} nicht in $L_3(q)$ involviert ist, folgt $q^4 \leqslant |\tilde{U}|$. Also ist $q \leqslant 2^4$. Da $11 \nmid |L_4(2^4)|$ und $11 \nmid |L_4(2^3)|$, folgt $q = 4$ und $|\tilde{U}| = 2^{10}$ oder 2^{12}. Weiter folgt, daß $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ eine zentrale Erweiterung von M_{22} ist. Sei nun $\bar{s} \in \bar{L}_B - \mathbf{O}_2(\bar{X})$. Dann ist $[\bar{s}, \tilde{U}] \leqslant \mathbf{C}_{\widetilde{U \cap Q_B}}(\bar{s})$. Die Struktur von Q_B liefert ein $\bar{t} \in \bar{L}_B - \mathbf{O}_2(\bar{X})\langle \bar{s} \rangle$ mit $[\bar{t}, [\bar{s}, \tilde{U}]] = 1$. Die Struktur von $\mathbf{N}_{\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})}(\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X}))$ liefert nun eine Untergruppe $\bar{V}$ von der Ordnung mindestens acht in $\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})$, so daß $[\bar{V}, [\bar{s}, \tilde{U}]] = 1$ ist. Die Struktur von Q_B liefert nun $[\bar{L}_B, [\bar{s}, \tilde{U}]] = 1$. Also ist $[\bar{L}_B, \tilde{U}] \leqslant \tilde{B}$. Das ist ein Widerspruch.

(3.9) *Bezeichnung*. Für $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ setze $\bar{R}_t = \langle \bar{L}_B^{\bar{h}} \mid \bar{t} \in \bar{L}_B^{\bar{h}}, \bar{h} \in \bar{M} \rangle$. Setze weiter $\tilde{V}_t = \langle \tilde{B}^{\bar{h}} \mid \bar{t} \in \bar{L}_B^{\bar{h}}, \bar{h} \in \bar{M} \rangle$ und $\bar{N}_t = \mathbf{C}_{\bar{R}_t}(\tilde{V}_t)$.

(3.10) SATZ. *Sei $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen*:

(1) $\bar{R}_t = \bar{L}_B$ *oder*.

(2) $\bar{R}_t/\bar{N}_t \cong SL_m(q)$, $Sp_{2m}(q)$ *oder* $\Omega^{\pm}(2m, q)$ *mit natürlicher Operation auf* $\tilde{V}_t$.

Beweis. Sei für ein $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ die Aussage (1) falsch. Nach (3.6) ist $V_t = V$ abelsch. Setze weiter $\bar{R} = \bar{R}_t$ und $\bar{N} = \bar{N}_t$.

Sei zunächst $V \subseteq Q_B$. Dann folgt für alle $C \in B^R$, daß $V \leqslant Q_C$ ist. Also ist jedes $\tilde{x} \in \tilde{V}^{\#}$ in $\bar{R}$ zu einem $\tilde{b} \in \tilde{B}$ konjugiert. Es ist $Q_B \cap Q$ eine maximale abelsche Untergruppe von Q. Also ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{V})| \geqslant |\tilde{V}|/q$. Das liefert $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \geqslant |\tilde{V}|/q$. Nach [7] gibt es ein $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$ mit $o(\rho) = q - 1$ und $[\bar{R}, \rho] \in \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Weiter ist ρ fixpunktfrei auf $\tilde{Q}^{\#}$. Da ρ auf $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ operiert, operiert ρ auch auf $\tilde{V}$. Nach [18, II(3.11)] ist dann $\tilde{V}$ ein $F_q\bar{R}/\bar{N}$-Modul. Nun folgt, daß $\bar{R}/\bar{N}$ von Wurzeluntergruppen erzeugt wird. Nach [19] ist $\bar{R}/\bar{N} \cong SL_m(q)$ oder $Sp_m(q)$ mit natürlicher Operation auf $\tilde{V}$. Ist $\bar{R}/\bar{N} \cong Sp_m(q)$, so folgt $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q$. Also ist $|\tilde{V}| = q^2$. Somit ist $\bar{R}/\bar{N} \cong Sp_2(q) \cong SL_2(q)$.

Sei nun $V \nsubseteq Q_B$. Setze $W = C_Q(V)$ und $W_1 = W \cap (\bigcap_{C \in B^R} Q_C)$. Sei $\tilde{W}_1 \neq 1$. Es ist $\tilde{W}$ $\bar{R}$-invariant. Somit ist $\tilde{B} \subseteq \tilde{W}_1$ oder $\tilde{W}_1 \subseteq \tilde{B}$. Sei zunächst $\tilde{B} \subseteq \tilde{W}_1$. Dann ist $V \subseteq W_1 \subseteq Q_B$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\tilde{W}_1 \subseteq \tilde{B}$. Da B eine TI-Menge in G ist, folgt nun $\tilde{W}_1 = \tilde{B} = \tilde{V}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\tilde{W}_1 = 1$. Es ist $[\tilde{W}, \bar{t}] \leqslant \tilde{W}_1 = 1$. Somit folgt $|[\tilde{Q}, \bar{t}]| \leqslant |Q : W| = |\tilde{V}|$. Da $\bar{R} \subseteq \mathbf{C}(\bar{t})$ ist, ist $[\tilde{Q}, \bar{t}]$ $\bar{R}$-invariant. Wegen $[\widetilde{Q \cap Q_B}, \bar{t}] = \tilde{B}$ folgt $\tilde{V} \subseteq [\tilde{Q}, \bar{t}]$. Also ist $\tilde{V} = [\tilde{Q}, \bar{t}]$.

Betrachte χ: $\tilde{x}\tilde{W} \to [\tilde{x}, \bar{t}]$ für $\tilde{x} \in \tilde{Q} - \tilde{W}$. Dann ist χ ein R-Isomorphismus von Q/W auf $\tilde{V}$. Die Operation von $\langle\rho\rangle$ liefert, daß χ ein $F_q\bar{R}$-Isomorphismus ist. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{V}$ wähle nun ein $\hat{x} \in \tilde{Q}$ mit $\tilde{\hat{x}}\tilde{W} = \chi^{-1}(\tilde{x})$. Wir definieren auf $\tilde{V}$ ein F_q-Skalarprodukt. Sei λ: $\mathbf{Z}(Q) \to F_q$ der durch ρ induzierte Isomorphismus. Setze nun $(\tilde{x}, \tilde{y}) = a \in F_q$, falls $[x, \hat{y}] = \lambda^{-1}(a)$ ist. Wegen $W = \mathbf{C}_Q(V)$ ist $(\ ,\ )$ wohldefiniert. Weiter ist $[x, \hat{y}\hat{u}] = [x, \hat{y}]^{\hat{u}}[x, \hat{u}] = [x, \hat{y}][x, \hat{u}]$. Also ist $(\ ,\ )$ bilinear. Die Operation von ρ (siehe [7, Satz 4]) liefert, daß $(\ ,\ )$ eine F_q-Bilinearform ist. Es ist $[\tilde{\hat{x}}, \bar{t}] = \tilde{x}$. Also ist $\hat{x}^{\bar{t}} = \hat{x}xs$ mit $s \in \mathbf{Z}(Q)$. Wähle nun $\hat{x}$ mit $\hat{x}^2 = 1$. Dann ist $\hat{x}xs$ eine Involution. Also ist $\hat{x}x$ eine Involution. Also ist $[x, \hat{x}] = 1 = \lambda^{-1}(0)$. Also haben wir $(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$. Insbesondere ist $(\ ,\ )$ ein symplektisches Skalarprodukt. Wegen $\mathbf{C}_V(Q) = \mathbf{Z}(Q)$ ist $(\ ,\ )$ regulär. Also ist $|\tilde{V}| = q^{2m}$ für geeignetes m. Wir haben nun, daß $\bar{R}/\bar{N} \lesssim Sp_{2m}(q)$ ist.

Es ist $\tilde{B}^{\perp} = \chi(\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)/\tilde{W}}) = \widetilde{V \cap Q_B}$, da $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(B)}, \bar{t}] \leqslant \tilde{Q}_B$ ist. Somit ist $|\widetilde{V \cap Q_B}| = q^{2m-1}$. Weiter ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{V \cap Q_B})| \geqslant |\widetilde{V \cap Q_B}|/q$. Also ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \geqslant q^{2m-2}$. Sei nun S der Stabilisator in $Sp(\tilde{V})$ von $\tilde{B}$. Dann ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \lesssim S$. Wegen $[\tilde{B}^{\perp}, \bar{L}_B] \leqslant \tilde{B}$, ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \lesssim \mathbf{O}_2(S)$. Insbesondere ist $|\mathbf{O}_2(S) : \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \leqslant q$.

Sei zunächst $m = 1$. Dann ist $\dim_{F_q} \tilde{V} = 2$. Da $\bar{R}/\bar{N}$ irreduzibel auf $\tilde{V}$ operiert, folgt $\bar{R}/\bar{N} \cong Sp_2(q) \cong L_2(q)$. Nun ist aber $[\bar{L}_B, \tilde{V}] \leqslant \tilde{B}$. Nach (3.4) ist dann $V \subseteq Q_B$. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $m = 2$. Weiter enthalte L_BN/N keine Involution, die vom Typ b_1 oder a_2 auf $\tilde{V}$ ist (für die Bezeichnung vergleiche [5, Sekt. 8]). Da $\bar{R}/\bar{N} \lesssim Sp_4(q)$ ist, folgt nun $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^2$. Da $q > 2$ ist, ist $\mathbf{O}_2(S)$ ein unzerlegbarer $S/\mathbf{O}_2(S)$-Modul. Nach (3.5) ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})$. Somit liefert die Struktur von $Sp_4(q)$ leicht, daß $|\mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})/\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})| \leqslant 2$

ist. Weiter ist $\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})$ elementar abelsch. Sei zunächst $|\mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})/\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})| = 2$. Da $\bar{R}/\bar{N} = \langle(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})^{\bar{R}/\bar{N}}\rangle$ ist, liefert nun [17, Lemma 18] einen Widerspruch. Also ist $\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{R}/\bar{N}$. Nun ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ stark abgeschlossen in $\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})$. Anwendung von [14] liefert jetzt, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{R}/\bar{N}$ ist.

Sei nun $\bar{L} \subseteq \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$, $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} : \bar{L}| = 2$, und $\bar{K} \subseteq \bar{R}/\bar{N}$, $|\bar{K}|$ ungerade mit $[\bar{K}, \bar{L}] = 1$. Die Struktur von Q_B liefert, daß $\bar{K}$ auf $\tilde{B}$ operiert. Da $\tilde{V}$ ein $F_q\bar{R}/\bar{N}$-Modul ist, folgt $|\bar{K} : \mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B})| \mid q-1$. Also ist $[\bar{K}, \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] = 1$. Dann liefert aber die Operation von $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ auf $\tilde{V}$, daß $[\tilde{V}, \mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B})] = 1$ ist. Also ist $|\bar{K}| \mid q-1$. Weiter ist $\mathbf{O}(\bar{R}/\bar{N}) \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R}/\bar{N})$. Nun ist nach [8], $\bar{R}/\bar{N} = X_1 \times \cdots \times X_k$ mit einfachen X_i. Sei nun $\bar{a} \in (\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap X_1)^{\#}$. Dann operiert $X_2 \times \cdots \times X_k$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$. Da $|[\bar{a}, \tilde{V}]| = q^2$ ist, folgt $X_2 \times \cdots \times X_k \lesssim L_2(q)$. Das liefert $k \leqslant 2$. Somit haben wir $\bar{R}/\bar{N} \cong L_2(q^2) \cong \Omega^-(4, q)$ oder $\bar{R}/\bar{N} \cong L_2(q) \times L_2(q) \cong \Omega^+(4, q)$. Im zweiten Fall liefert die Struktur von $Sp_4(q)$, daß es in $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ Involutionen vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ gibt. Also ist $\bar{R}/\bar{N} \cong \Omega^-(4, q)$ mit natürlicher Operation auf $\tilde{V}$.

Also enthält im folgenden $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ stets Involutionen, die vom Typ b_1 oder a_2 auf $\tilde{V}$ sind. Sei nun $\bar{a} \in \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$, $\bar{a}$ vom Typ b_1 auf $\tilde{V}$. Dann ist $[\tilde{V}, \bar{a}] = \tilde{B}$. Weiter ist $\tilde{V}$ ein irreduzibler $F_q\bar{R}/\bar{N}$-Modul. Nach [2] ist $o(\bar{a}\bar{a}^{\bar{r}}) = 2$ oder ungerade für alle $\bar{r} \in \bar{R}$. Sei $\bar{X} \lhd \bar{R}/\bar{N}$, $|\bar{X}|$ ungerade. Es operiert $\bar{L}_B$ auf $\bar{X}$. Da $q > 2$ ist, folgt nun leicht $[\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, \bar{X}] = 1$. Also ist $\bar{X} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R}/\bar{N})$. Setze nun $\bar{R}_1 = \mathbf{E}(\bar{R}/\bar{N})$. Sei $\bar{E} = \langle \bar{E}_i \mid \bar{E}_i$ Komponente von $\bar{R}_1$ mit $[\bar{a}, \bar{E}_i] = 1\rangle$. Dann ist $[\bar{E}, \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] \leqslant \bar{E} \cap \bar{L}_B$, da $\bar{E}$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}] = \tilde{B}$ operiert. Da $\mathbf{O}_2(\bar{E}) = 1$ ist, folgt $[\bar{E}, \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] = 1$. Die Operation auf $\tilde{V}$ liefert nun $\bar{E} = 1$. Somit ist $\bar{R}_1\langle\bar{a}\rangle = \langle \bar{a}^{\bar{R}_1}\rangle$. Da jeder auflösbare Normalteiler von $\bar{R}/\bar{N}$ in $\mathbf{Z}(\bar{R}/\bar{N})$ enthalten ist, folgt nun $\mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{R}_1) = 1$. Weiter wissen wir, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ in $\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{a})$ normal ist. Die Struktur von $Sp_{2m}(q)$ liefert nun $|\langle \bar{a}^{\bar{R}/\bar{N}} \cap \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}\rangle| \leqslant q$. Nun erhalten wir mit [3], daß $\bar{R}_1$ zu $Sp_{2m}(q)$ oder $U_4(q)$ isomorph ist.

Sei also $\bar{R}_1 \cong U_4(q)$. Dann ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^3$. Also ist $m = 2$. Aber $U_4(q) \not\subseteq Sp_4(q)$. Somit haben wir nun mit [16], daß $\bar{R}/\bar{N} \cong Sp_{2m}(q)$ ist. Weiter ist $\tilde{V}$ der natürliche Modul.

Also können wir nun annehmen, daß es in $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ keine Involutionen gibt, die vom Typ b_1 auf $\tilde{V}$ sind. Insbesondere ist dann $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^{2m-2}$. Da $q > 2$ ist, gibt es in $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ eine Vierergruppe K, die nur Involutionen enthält, die vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ sind.

Setze $\mathscr{T} = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, \bar{a}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}\}$ und $\bar{X} = \langle \mathscr{T}^{\bar{R}/\bar{N}}\rangle$. Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{T}^{\bar{R}/\bar{N}}$ eine $\bar{X}$-Konjugiertenklasse ist. Da $\mathbf{O}_2(\bar{R}/\bar{N}) = 1$ ist, ist auch $\mathbf{O}_2(\bar{X}) = 1$. Also ist nach [[22; (4.15)] $\mathscr{T}^{\bar{R}/\bar{N}} = \bigcup \bar{\mathscr{D}}_i$, $\bar{\mathscr{D}}_i$ Konjugiertenklassen von {4, ungerade}$^+$-Transpositionen von $\langle\bar{\mathscr{D}}_i\rangle$. Beachte, daß nach [5] die Menge der Involutionen vom Typ a_2 in $Sp_{2m}(q)$ eine Konjugiertenklasse von {4, ungerade}$^+$-Transpositionen ist. Sei nun $\bar{X}_1 = \langle\bar{\mathscr{D}}_1\rangle$ und $\bar{X}_2 = \langle \mathscr{T}^{\bar{R}/\bar{N}} - \bar{\mathscr{D}}_1\rangle$. Nach [22] ist $[\bar{X}_1, \bar{X}_2] = 1$. Sei nun $\bar{a} \in \bar{\mathscr{D}}_1 \cap \mathscr{T}$. Dann ist

$|[\bar{a}, \tilde{V}]| = q^2$. Es operiert $\bar{X}_2$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$. Sei $\bar{K}$ der Kern von $\bar{X}_2$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$. Dann ist $\bar{X}_2/\bar{K} \lesssim GL_2(q)$. Da $\tilde{B} \leqslant [\bar{a}, \tilde{V}]$ ist, folgt $\bar{K} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})$. Da $\mathbf{O}_2(\bar{K}) = 1$ ist, folgt $\bar{K} \cap \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} = 1$. Also ist $[\bar{K}, \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] = 1$. Dann folgt aber $[\bar{K}, \tilde{V}] = 1$. Also ist $\bar{K} = 1$. Somit ist $\bar{X}_2 \lesssim GL_2(q)$. Das gleiche Argument liefert $\bar{X}_1 \lesssim GL_2(q)$, falls $\bar{X}_2 \neq 1$ ist. Also haben wie $\bar{X} = \bar{X}_1$ oder $\bar{X} \lesssim GL_2(q) \times GL_2(q)$. Wir wollen den zweiten Fall annehmen. Es ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ in $\mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{X}_1) \cap \mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{X}_2)$ enthalten. Setze $\bar{A}_1 = \langle \bar{X}_1, \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}\rangle$. Dann folgt $\bar{A}_1 = \bar{Y}_1 \times \bar{X}_1$. Setze nun $\bar{Z} = \mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{X}_1 \times \bar{X}_2)$. Dann folgt $|\bar{Z}| \geqslant q^{2m-4}$. Sei $\bar{c} \in \bar{Z}^{\#}$. Dann ist $|[\bar{c}, \tilde{V}]| = q^2$. Da entweder $[\bar{X}_1, [\bar{c}, \tilde{V}]] \neq 1$ oder $[\bar{Y}_1, [\bar{c}, \tilde{V}]] \neq 1$ ist, folgt nun $[\bar{c}_1, \tilde{V}] = [\bar{c}_2, \tilde{V}]$ für alle $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \bar{Z}^{\#}$. Da $\bar{U}^{\#} \subseteq \bar{\mathscr{T}}$ ist, ist $\bar{X}$ nicht auflösbar. Also ist o.B.d.A. $\bar{X}_2$ nicht auflösbar. Sei nun $\bar{Z} \neq 1$. Sei $\bar{a} \in \bar{\mathscr{D}}_1$. Dann ist $|[\bar{a}, [\bar{c}, \tilde{V}]]| = q$. Nach Konstruktion operiert aber $\bar{X}_2$ nicht trivial auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$. Somit operiert $\bar{X}_2$ nicht trivial auf $[[\bar{a}, [\bar{c}, \tilde{V}]]$. Die Existenz des Elementes $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$ mit $[\bar{R}, \rho] \in \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$, liefert mit [18, II(3.11)], daß alle vorkommenden Moduln F_q-Moduln sind. Also folgt nun $[[[\bar{a}, [\bar{c}, \tilde{V}]], \bar{X}_2] = 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{Z} = 1$. Dann ist $m = 2$. Weiter ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \leqslant \bar{X}$. Somit ist $\bar{X} \simeq L_2(q) \times L_2(q) \simeq \Omega^-(4, q)$. Somit ist $\bar{X} \simeq \bar{R}/\bar{N}$ mit natürlicher Operation auf $\tilde{V}$.

Somit können wir jetzt annehmen, daß $\mathscr{T}^{\bar{R}/\bar{N}}$ eine $\bar{X}$-Konjugiertenklasse ist. Da $\bar{U}^{\#} \subseteq \bar{\mathscr{T}}$ ist, folgt $\bar{X} = \bar{X}'$. Sei nun $1 \neq \bar{K} \trianglelefteq X$, $\bar{K}$ eine p-Gruppe, p ungerade Primzahl. Ist $[\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, \bar{K}] = 1$, so operiert $\bar{K}$ auf $\tilde{B}$. Da $\tilde{V}$ ein $F_q\bar{X}$-Modul ist, folgt $|\bar{K}/\mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B})| \mid q-1$. Das liefert mit $[\mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B}), \tilde{V}] = 1$, daß $|\bar{K}| \mid q-1$ und $\bar{K} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{X})$ ist. Sei nun $\bar{a} \in \bar{\mathscr{T}}$ mit $\mathbf{C}_{\bar{K}}(\bar{a}) \neq 1$. Sei $\bar{K} \nsubseteq \mathbf{N}_{\bar{R}/\bar{N}}(L_BN/N)$. Dann folgt wegen $\bar{K} = \langle \mathbf{C}_{\bar{K}}(\bar{a}) \mid \bar{a} \in \bar{\mathscr{T}}\rangle$, daß es ein $\bar{a} \in \bar{\mathscr{T}}$ mit $[\mathbf{C}_{\bar{K}}(\bar{a}), \tilde{B}] \nsubseteq \tilde{B}$ gibt. Es gibt ein $\bar{L} \subseteq \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ mit $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} : \bar{L}| = 2$ mit $\bar{K}_1 = \mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{K}}(\bar{a})}(\bar{L}) \neq 1$. Es operiert $\langle \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, \bar{K}_1\rangle$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$. Somit ist $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\bar{L}) > \tilde{B}$. Also ist $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\bar{L}) = [\bar{a}, \tilde{V}]$. Das widerspricht aber der Struktur von $Sp_{2m}(q)$, $q > 2$. Also ist $\bar{K} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{X})$. Nach [22] ist $\bar{X}$ eine Überlagerungsgruppe einer Chevalley- oder Steinberg-Gruppe von der Charakteristik 2 verschieden von ${}^2F_4(r)$ oder $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$ ist zu $O_n^{\epsilon}(3)$, $O_n(5)$, A_6, J_2, $M(22)$ oder $M(23)$ isomorph.

Sei zunächst $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) = G(r)$ eine Chevalley-Gruppe oder Steinberg-Gruppe verschieden von $Sp_t(r)$, $\Omega^{\pm}(t, r)$, $L_t(r)$, $F_4(r)$, ${}^2F_4(r)$, $Sz(r)$, $U_3(r)$ und $U_4(r)$. Sei weiter $\bar{a} \in \bar{\mathscr{T}}$. Dann liefert die Struktur dieser Gruppen, daß $[[\bar{a}, \tilde{V}], \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})'] = 1$ sein muß. Also ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X} \trianglelefteq \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$. Dann folgt, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X} \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}))$ ist. Da $[\mathbf{O}^2(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})), \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] \leqslant \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X}$ ist, folgt nun $[\mathbf{O}^2(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})), \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] = 1$. Da $\tilde{V}$ ein $F_q\bar{X}$-Modul ist, liefert das nun $[\tilde{V}, \mathbf{O}^2(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}))] = 1$. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq Sz(r)$ oder $U_3(r)$. Ist $\mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{X}) \neq 1$, so wähle $\bar{s} \in \mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{X})$. Es ist $|[\bar{s}, \tilde{V}]| = q^2$. Da $\bar{X} \not\lesssim GL_2(q)$ ist, folgt $[\bar{X}, [\bar{s}, \tilde{V}]] = 1$. Das ist aber ein Widerspruch zu der irreduziblen Operation von $\bar{R}$ auf $\tilde{V}$. Also ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = r$. Sei $\bar{\tau} \in \bar{X}$ ein Element von Primzahlordnung mit $o(\bar{\tau}) \mid r^4 - 1$ bzw. $r^6 - 1$ aber $o(\bar{\tau}) \nmid 2^c - 1$ für $2^c < r^4$ bzw. r^6. Nach [1, Korollar 2, p. 358] gibt es das. Wähle $\bar{\tau}$ mit $\bar{\tau}^{\bar{a}} = \bar{\tau}^{-1}$. Dann folgt $|\tilde{V}/\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\bar{\tau})| \leqslant q^4$. Also ist $o(\bar{\tau}) \mid$

$q^4 - 1$. Das liefert $q^4 \geqslant r^4$. Also ist $q \geqslant r = q^{2m-2}$. Da $m \geqslant 2$ ist, ist das ein Widerspruch.

Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq F_4(r)$. Wie oben folgt $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X} \trianglelefteq \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$. Sei zunächst $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X} \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}))$. Dann folgt $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}), \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] = 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $| \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X} | = r^7$. Es ist $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{L}_B \cap \bar{X}) = \mathbf{O}_2(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}))$. Wegen $[\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})] \subseteq \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X}$ folgt, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ innere Automorphismen auf $\bar{X}$ induziert, die den Automorphismen aus $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X}$ entsprechen. Also ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} = \mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{X}) \times (\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \bar{X})$. Sei nun $\bar{c} \in \mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\bar{X})^{\#}$. Dann ist $|[\bar{c}, \tilde{V}]| = q^2$. Also ist $[[\bar{c}, \tilde{V}], X] = 1$. Da $\tilde{B} \subseteq [\bar{c}, \tilde{V}]$ ist, ist das ein Widerspruch. Also ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \bar{X}$. Dann ist aber $[\bar{a}, \tilde{V}] \subseteq \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B)$. Das ist ein Widerspruch zu (3.5).

Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq Sp_{2t}(r)$. Es entspreche zunächst $\bar{a}$ in der natürlichen Darstellung einer Transvektion. Sei $t > 2$. Dann ist $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}), [\bar{a}, \tilde{V}]] = 1$. Nun erhalten wir wie im Falle $X \simeq F_4(r)$ den Widerspruch $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) \geqslant [\bar{a}, \tilde{V}]$. Sei also $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq Sp_4(r)$. Weiter ist $r \leqslant q$, da wir sonst wie eben argumentieren können. Weiter ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \bar{X}$. Also ist $q^{2m-2} \leqslant r^3 \leqslant q^3$. Das liefert $m = 2$. Das ist aber ein Widerspruch.

Somit haben wir, daß $\bar{a}$ nicht einer Transvektion in der natürlichen Darstellung entspricht. Sei zunächst wieder $t \geqslant 3$. Klar ist wieder $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \bar{X}$. Da $\mathbf{C}_{\bar{R}/\bar{N}}(\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N})/\mathbf{Z}(\bar{R}/\bar{N})$ eine 2-Gruppe ist, folgt, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \not\trianglelefteq \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$ ist. Sei nun $\bar{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}))$, $\bar{g} \in \bar{X}$, so daß alle Involutionen aus $\bar{Z} \times \bar{Z}^{\bar{g}}$ in $\bar{X}$ konjugiert sind. Wähle nun $\bar{c} \in \bar{Z}^{\bar{g}}$. Dann können wir $[\bar{c}, \tilde{V}] \cap [\bar{a}, \tilde{V}] \neq 1$ annehmen. Also können wir $[\bar{c}, \tilde{V}] \cap [\bar{a}, \tilde{V}] = \tilde{B}$ annehmen. Insbesondere ist $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\tilde{B}) \nsubseteq \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$. Das liefert nun, daß $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\tilde{B})$ eine Untergruppe $\bar{Y}$ enthält, die eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung r^{2t-1} mit $Sp_{2t-2}(r)$ ist, oder $t = 3$ und $\bar{Y}$ ist eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung r^6 mit $SL_3(q)$. Im ersten Fall gibt es ein $\bar{d} \in (\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \mathbf{Z}(\bar{Y}))^{\#}$. Dann ist aber $[\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}, [\bar{d}, \tilde{V}]] = 1$. Also ist $\tilde{B} = [\bar{d}, \tilde{V}]$. Insbesondere ist $\bar{d}$ vom Typ b_1. Das ist ein Widerspruch. Also ist $t = 3$ und $\bar{Y}$ ist eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung r^6 durch $SL_3(r)$. Ist $| \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} | = r^6$, so gibt es in $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ eine Involution $\bar{d}$, so daß $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{d})$ die Gruppe $Sp_4(r)$ involviert. Es folgt $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{d}), [\bar{d}, \tilde{V}]] = 1$. Also ist $[\bar{d}, \tilde{V}] = \tilde{B}$. Insbesondere ist $\bar{d}$ vom Typ b_1 auf $\tilde{V}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $| \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} | = r^3 = q^{2m-2}$. Da $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \not\trianglelefteq \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$ ist, folgt $r \leqslant q$. Somit haben wir nun $m = 2$. Da die Sylow 2-Untergruppen von $Sp_4(q)$ aber die Klasse zwei haben ist $Sp_6(r) \nsubseteq Sp_4(q)$. Also ist der Fall $Sp_{2t}(r)$ nur für $t = 2$ möglich.

Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq Sp_4(r)$. Dann folgt wieder $m = 2$ und $r \leqslant q$. Sei $r^2 \leqslant q$. Dann ist $| \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} | = q^{2m-2} = q^2 \leqslant r^3$. Das aber ein Widerspruch. Also ist $r = q$. Dann gibt es aber Involutionen vom Typ b_1 in $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$.

Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq \Omega^{\pm}(2t, r)$. Sei weiter $t \geqslant 4$. Es ist wieder $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \bar{X}$. Weiter ist $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a}), [\bar{a}, \tilde{V}]] \neq 1$. Da $|[\bar{a}, \tilde{V}]| = q^2$ ist, induziert $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$ eine Untergruppe von $L_2(q)$. Insbesondere ist $r \leqslant q$. Sei $\bar{Z} = \mathbf{Z}_{\bar{X}}(\mathbf{C}(\bar{a}))$, $\bar{g} \in \bar{X}$, so daß $\bar{Z} \times \bar{Z}^{\bar{g}}$ nur unter $\bar{X}$ konjugierte Involutionen enthält. Dann können wir annehmen, daß es ein $\bar{c} \in \overline{W}^g$ gibt, so daß $[\bar{c}, \tilde{V}] \cap [\bar{a}, \tilde{V}] \neq 1$ ist. Also ist $[\bar{c}, \tilde{V}] \cap [\bar{a}, \tilde{V}] = \tilde{B}$. Dann involviert $\mathbf{C}_{\overline{X}}(\tilde{B})$ eine Untergruppe $\overline{Y}$, die eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung r^{2t-2} mit $\Omega^{\pm}(2t-2, r)$ ist. Das liefert nun $q^{2m-2} = r^{2t-2}$. Da $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}([\bar{a}, \tilde{V}])| \geqslant q$ ist, folgt, daß $\mathbf{C}_{\overline{X}}(\bar{a})$ die Gruppe $L_2(q)$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$ induziert. Also ist $r = q$. Dann ist nun $t = m$. Insbesondere ist $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq \Omega^{\pm}(2m, q)$ mit natürlicher Operation auf $\tilde{V}$. Da $q > 2$ ist, liefert [16], daß $\bar{R}/\bar{N} \simeq \Omega^{\pm}(2m, q)$ ist.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq U_4(r) \simeq \Omega^{-}(6, r)$. Dann folgt $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \leqslant r^4$. Weiter induziert wieder $\mathbf{C}_{\overline{X}}(\bar{a})$ die Gruppe $L_2(q)$ auf $[\bar{a}, \tilde{V}]$, da $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}([\bar{a}, \tilde{V}])| \geqslant q$ ist. Also ist $r = q$. Somit ist nun $m = 3$ und $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^4$. Also ist $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq \Omega^{-}(6, q)$ mit natürlicher Operation auf $\tilde{V}$. Nach [16] ist nun wieder $\bar{R}/\bar{N} \simeq \Omega^{-}(6, q)$.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq L_t(r)$. Sei zunächst $t \geqslant 5$. Da dann $\mathbf{C}_{\overline{X}}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{C}_{\overline{X}}([\bar{a}, \tilde{V}])$ und $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \leqslant \overline{X}$ ist, folgt nun wieder der Widerspruch $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) > \tilde{B}$. Also ist $t \leqslant 4$.

Sei zunächst $t = 4$. Ist $r > q$, so können wir wie eben argumentieren. Also ist $r \leqslant q$. Weiter induziert $\mathbf{C}_{\overline{X}}(\bar{a})$ die Gruppe $L_2(q)$ auf $[\tilde{V}, \bar{a}]$. Somit ist $q = r$. Nun folgt $q^{2m-2} = |\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \leqslant r^4 = q^4$. Das liefert $m = 3$, da $\overline{X} \subseteq Sp_{2m}(q)$ ist. Weiter sieht man leicht, daß die Operation die natürliche Operation für $\Omega^{+}(6, q)$ ist [10]. Also ist nach [16], $\bar{R}/\bar{N} \simeq \Omega^{+}(6, q)$.

Sei jetzt $t = 3$. Es ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \overline{X}| \leqslant r^2$. Ist $\bar{c} \in \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$, so induziert $\bar{c}$ einen inneren Automorphismus auf $\overline{X}$. Da $\mathbf{C}_{\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}}(\overline{X}) = 1$ ist, folgt, daß $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \leqslant r^2$ ist. Also ist $q^{2m-2} \leqslant r^2$. Sei $\bar{S}_1 \in \mathrm{Syl}_2(\overline{X})$ mit $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \overline{X} \subseteq \bar{S}_1$. Sei zunächst $r > q$. Da $\mathbf{Z}(\bar{S}_1) \subseteq \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$, folgt, daß $\mathbf{N}_{\overline{X}}(\bar{S}_1) \subseteq \mathbf{N}_{\overline{X}}(\tilde{B})$. Also ist $[\mathbf{N}_{\overline{X}}(\bar{S}_1), \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}] \subseteq \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \overline{X}$. Das liefert nun $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \overline{X}$. Dann folgt aber, daß alle Involutionen aus $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ sind. Das widerspricht aber der Struktur von $Sp_{2m}(q)$. Also ist $r \leqslant q$. Das liefert nun $q^{2m-2} \leqslant q^2$. Also ist $m = 2$ und $r = q$. Aber $L_3(q)$ ist nicht in $Sp_4(q)$ enthalten.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq L_2(r)$. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten. Es ist $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \overline{X}$ oder $\overline{X} \simeq L_2(q)$. Sei zunächst $\overline{X} \simeq L_2(q)$. Ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| > q^2$, so gibt es in $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\overline{X})$ zwei Involutionen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$, so daß $[\bar{c}_1, \tilde{V}] \cap [\bar{c}_2, \tilde{V}] = \tilde{B}$ ist. Dann ist aber $\overline{X} \subseteq \mathbf{C}(\tilde{B})$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^2$. Insbesondere ist $m = 2$. Die Struktur von $Sp_4(q)$ liefert nun, daß es auch in $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\overline{X})$ Involutionen gibt, die vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ sind. Das widerspricht aber der Konstruktion von $\overline{X}$. Somit haben wir, daß $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \overline{X}$ ist. Insbesondere sind alle Involutionen aus $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$. Das widerspricht der Struktur von $Sp_{2m}(q)$.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq O_t^{\epsilon}(3)$ oder $O_t^{\epsilon}(5)$. Dann folgt $[\mathbf{C}_{\overline{X}}(\bar{a})', [\bar{a}, \tilde{V}]] = 1$. Weiter ist wieder $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \subseteq \overline{X}$. Das liefert dann aber einen Widerspruch zu $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^{2m-2} \geqslant 16$.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq A_6$. Dann ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \overline{X}| = 4$. Da $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\overline{X}) = 1$ ist, folgt, daß $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| \leqslant 8$ ist. Das ist ein Widerspruch.

Sei $\overline{X}/\mathbf{Z}(\overline{X}) \simeq J_2$. Dann ist $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} \cap \overline{X}| \leqslant 16$. Das liefert nun $m = 2$. Aber $J_2 \nsubseteq Sp_4(q)$.

Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq M(22)$ oder $M(23)$. Es ist wieder $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{a})', [\bar{a}, \tilde{V}]] = 1$. Das liefert nun den Widerspruch $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = 2$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(3.11) LEMMA. *Für ein $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ sei $\bar{R}_t \neq \bar{L}_B$. Dann ist $\bar{N}_t = \langle(\bar{L}_B)^{\bar{h}} \cap \bar{N}_t \mid \bar{h} \in \bar{R}_t\rangle$. Ist $\bar{R}/\bar{N} \not\simeq SL_m(q)$, so setze $\bar{T} = \mathbf{Z}(\bar{R}_t) \cap \bar{L}_B$. Dann ist $|\bar{T}| \leqslant q$ und $\bar{N}_t' \leqslant \bar{T}$.*

Beweis. Setze $\bar{N}_0 = \langle(\bar{L}_B)^{\bar{h}} \cap \bar{N}_t \mid \bar{h} \in \bar{R}_t\rangle$. Seien $\bar{h}$, $\bar{k} \in \bar{R}_t$. Es ist $[\tilde{B}^{\bar{h}}, \bar{L}_B{}^{\bar{k}} \cap \bar{N}_t] = [\tilde{B}^{\bar{k}}, \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{N}_t] = 1$. Also ist $[\bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{N}_t, \bar{L}_B{}^{\bar{k}} \cap \bar{N}_t] \leqslant \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{L}_B{}^{\bar{k}} \cap \bar{N}_t$. Somit ist $\bar{N}_0$ eine 2-Gruppe. Ist $\bar{h} \in \bar{R}_t$, so ist stets $\bar{N}_t \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{B}^{\bar{h}})$. Also ist $\bar{N}_t \leqslant \mathbf{N}_{\bar{R}_t}(\bar{L}_B{}^{\bar{h}})$. Somit ist $[\bar{N}_t, \bar{L}_B{}^{\bar{h}}] \leqslant \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \cap \bar{N}_t \leqslant \bar{N}_0$. Also ist $\bar{N}_t/\bar{N}_0 \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R}_t/\bar{N}_0)$. Weiter ist $\bar{N}_t/\bar{N}_0 \cap \bar{L}_B\bar{N}_0/\bar{N}_0 = 1$. Somit ist $\bar{N}_t/\bar{N}_0 \subseteq (\bar{R}_t/\bar{N}_0)'$. Da $q > 2$ ist, liefert nun die Anwendung von [16], daß $\bar{R}_t/\bar{N}_t \simeq SL_3(4)$, $SL_2(4)$ oder $\Omega^+(4, 4)$ ist. Weiter wissen wir, daß $|\bar{L}_B\bar{N}_0/\bar{N}_0| = 16$, 4 bzw. 16 ist. Die Struktur der Überlagerungsgruppen liefert zunächst, daß $\bar{R}_t/\bar{N}_t \simeq SL_3(4)$ ist. Da $\bar{L}_B\bar{N}_0/\bar{N}_0$ in einer Sylow 2-Untergruppe von $\bar{R}_t/\bar{N}_0$ normal ist, folgt nun der Widerspruch $\bar{L}_B\bar{N}_0/\bar{N}_0 \cap \bar{N}_t/\bar{N}_0 \neq 1$. Damit ist $\bar{N}_0 = \bar{N}_t$ gezeigt.

Sei nun $\bar{R}_t/\bar{N}_t \not\simeq SL_m(q)$. Dann gibt es nach (2.1) ein $\bar{h} \in \bar{R}_t$, so daß $\bar{R}_t = \bar{N}_t\langle\bar{L}_B, \bar{L}_B{}^{\bar{h}}\rangle$ ist. Es ist $(\bar{N}_t)' \subseteq \bigcap_{\bar{h}\in\bar{R}_t} \bar{L}_B{}^{\bar{h}} = \mathbf{Z}(\bar{R}_t) \cap \bar{L}_B$.

Sei $\bar{x} \in \mathbf{Z}(\bar{R}_t) \cap \bar{L}_B$. Dann ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(V_t)}, \bar{x}] \leqslant \tilde{V}_t \cap \widetilde{Q \cap Q_B} < \tilde{V}_t$. Da $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(V_t)}, \bar{x}]$ von $\bar{R}_t$ normalisiert wird, folgt nun $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(V_t)}, \bar{x}] = 1$. Also induziert $\bar{x}$ einen Automorphismus von $Q/\mathbf{C}_Q(V_t)$ auf $\tilde{V}_t$. Mit (2.4) erhalten wir nun $|\mathbf{Z}(\bar{R}_t) \cap \bar{L}_B| \leqslant q$.

(3.12) LEMMA. *Sei $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ und $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_r$, $r > 1$, Konjugierte von $\bar{L}_B$ in $\bar{M}$, die alle $\bar{t}$ enthalten. Setze $\bar{X} = \langle\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_r\rangle$. Dann gilt:*

(1) *$\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \simeq SL_k(q)$, falls $\bar{R}_t/\bar{N}_t \simeq SL_m(q)$, $k \leqslant m$.*

(2) *Ist $\bar{R}_t/\bar{N}_t \not\simeq SL_m(q)$, so ist $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \simeq L_2(q)$ oder $\bar{X} = \bar{R}_t$.*

Beweis. (1) Sei $\bar{R}_t/\bar{N}_t \simeq SL_m(q)$. Dann ist $|\bar{L}_B\bar{N}_t/\bar{N}_t| = q^{m-1}$. Es bewirkt $\bar{L}_B\mathbf{O}_2(\bar{X})/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ Transvektionen über F_q auf $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\mathbf{O}_2(\bar{X}))$. Sei $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\mathbf{O}_2(\bar{X})) = \tilde{B}$. Dann ist $\bar{X} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Das liefert mit (3.5), daß $r = 1$ ist. Das ist ein Widerspruch. Somit folgt nun mit [19], daß $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X})$ zu $SL_k(q)$ oder $Sp_{2k}(q)$ isomorph ist. Ist $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \simeq Sp_{2k}(q)$, so ist $|\bar{L}_B : \mathbf{O}_2(\bar{X}) \cap \bar{L}_B| = q$. Dann ist $|\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\mathbf{O}_2(\bar{X}))| \leqslant q^2$, da $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist. Also ist $\bar{X}/\mathbf{O}_2(\bar{X}) \simeq Sp_2(q) \simeq SL_2(q)$.

(2) folgt mit [23, Sekt. 13] und (2.1).

4. DIE STRUKTUR VON $\mathbf{F}^*(M)$

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß es ein $\mathbf{Z}(Q) \neq B \subseteq Q$, $B \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G, gibt. Setze $L_B = Q(Q_B \cap M)$. Wir nehmen weiter an, daß es in $\bar{L}_B$ keine Involution gibt, die auf $\tilde{Q}$ vom Typ a_2 operiert. Weiter sei $n > 2$.

(4.1) LEMMA. *Setze* $\bar{M}_0 = \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$. *Dann gilt*

(i) *Ist* $\bar{X}$ *ein quasieinfacher Normalteiler von* $\bar{M}$, *so ist* $\bar{X} \subseteq \bar{M}_0$.

(ii) *Enthält* $\bar{M}_0$ *keinen zu* $L_2(q)$ *isomorphen Normalteiler, so enthält* $\bar{M}_0$ *höchstens einen quasieinfachen Normalteiler.*

(iii) *Es enthalte* $\bar{M}_0$ *einen zu* $L_2(q)$ *isomorphen Normalteiler* $\bar{X}$. *Sind* $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2 \subseteq \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X})$ *quasi-einfache Normalteiler von* $\bar{M}_0$, *so ist* $\bar{X}_1 \simeq \bar{X}_2 \simeq L_2(q)$.

Beweis. (i) Es ist $[\bar{X}, \bar{M}_0] \leqslant \bar{M}_0 \cap \bar{X} \trianglelefteq \bar{X}$. Also ist $\bar{X} \subseteq \bar{M}_0$ oder $[\bar{M}_0, \bar{X}] = 1$. Sei $[\bar{M}_0, \bar{X}] = 1$. Dann folgt $[\bar{L}_B, \bar{X}] = 1$. Nach (3.1) operiert dann $\bar{X}$ auf $\tilde{B}$. Die Struktur von $\mathrm{Aut}(Q)$ liefert nun $[\tilde{B}, \bar{X}] = 1$. Sei nun $\bar{r} \in \bar{X}$, $o(\bar{r})$ ungerade. Dann ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{r}) \neq 1$ und $[\tilde{Q}, \bar{r}] \neq 1$. Weiter operiert $\bar{L}_B$ auf beiden Gruppen. Nach (3.5) ist das aber ein Widerspruch.

(ii) Seien $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ quasieinfache Normalteiler von $\bar{M}_0$. Dann ist $[\bar{X}_1, \bar{X}_2] = 1$. Setze $\bar{L}_i = \bar{L}_B \cap \bar{X}_i$. Seien $\bar{S}_i \in \mathrm{Syl}_2(\bar{X}_i)$ mit $\bar{S}_i \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Dann ist $[\bar{L}_B, \bar{S}_i] \leqslant \bar{L}_i$. Ist $\bar{L}_i = 1$, so liefern [24, (3.12), 13] $\bar{X}_i \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Das ist aber ein Widerspruch. Sei nun $\bar{t} \in (\bar{L}_1)^{\#}$. Dann ist $\bar{X}_2 \leqslant \bar{R}_t$, da $\bar{X}_1 = \langle \bar{L}_2^{\bar{X}_2} \rangle$ ist. Wegen $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$, folgt nun $\bar{X}_2 \cap \bar{N}_t = 1$. Nun liefert (3.10), $\bar{R}_t = \bar{N}_t \bar{X}_2 = \bar{N}_t \times \bar{X}_2$. Weiter ist nach (3.11), $\bar{N}_t \leqslant \bar{L}_B$.

Sei zunächst $\bar{X}_2 \not\simeq SL_m(q)$. Dann ist nach (3.11), $|\bar{N}_t| = q$. Also ist $|\bar{L}_1| \leqslant q$. Ist $\bar{\tau} \in (\bar{L}_2)^{\#}$, so folgt $\bar{X}_1 \leqslant \bar{R}_\tau$. Nun folgt $R_\tau/N_\tau \simeq L_2(q)$. Insbesondere ist $\bar{X}_1 \simeq L_2(q)$. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir nun $\bar{X}_1 \simeq SL_r(q)$, $\bar{X}_2 \simeq SL_m(q)$, r, $m \geqslant 3$. Sei zunächst $\bar{L}_B \neq \bar{L}_1 \times \bar{L}_2$. Dann folgt $\mathbf{C}_{\bar{N}_t}(\bar{X}_1 \bar{X}_2) \neq 1$. Nun liefert aber (3.10), $\bar{X}_1 \simeq \bar{X}_2 \simeq L_2(q)$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{L}_B = \bar{L}_1 \times \bar{L}_2$. Dann folgt $\bar{M}_0 = \bar{X}_1 \times \bar{X}_2$. Die Struktur von $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ liefert zusammen mit (3.6), daß $\langle B^{\bar{M}_0} \rangle$ elementar abelsch ist. Das ist aber ein Widerspruch. Damit ist (ii) bewiesen.

(iii) Da wieder $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \leqslant \bar{R}_t$ für $\bar{t} \in (\bar{X} \cap \bar{L}_B)^{\#}$, folgt mit (3.10) $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \simeq \Omega^+(4, q)$. Also ist $\bar{X}_1 \simeq \bar{X}_2 \simeq L_2(q)$.

(4.2) LEMMA. *Sei* $\mathbf{E}(\bar{M}) \neq 1$. *Gibt es kein* $\bar{X} \trianglelefteq \mathbf{E}(\bar{M})$, $\bar{X} \simeq L_2(q)$, *so ist* $\mathbf{E}(\bar{M})$ *quasieinfach.*

Beweis. Nach (4.1)(ii) gibt es in $\bar{M}$ höchstens einen quasieinfachen Normalteiler. Also gibt es eine Komponente $\bar{Y}$ von $E(\bar{M})$ mit $\bar{L}_B \not\leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$. Es ist $\bar{Y} \not\simeq L_2(q)$. Sei $\bar{t} \in \bar{L}_B - \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$. Dann ist $[\bar{Y}, \bar{Y}^{\bar{t}}] = 1$.

Betrachte χ: $\bar{Y} \to \hat{Y} = \langle \bar{g}\bar{g}^{\bar{t}} \mid \bar{g} \in \bar{Y} \rangle$ mit $\chi(\bar{g}) = \bar{g}\bar{g}^{\bar{t}}$. Dann ist χ ein Homomorphismus. Es ist $\bar{K} = \mathrm{Kern}\, \chi \leqslant \mathbf{Z}(\bar{Y}) \leqslant \mathbf{O}(\bar{Y})$. Sei nun $\bar{S} \in \mathrm{Syl}_2(\bar{M})$ mit $\bar{L}_B \leqslant \bar{S}$ und $\bar{S}_1 = \bar{S} \cap \bar{Y}$. Dann ist $\bar{S}_1 \in \mathrm{Syl}_2(\bar{Y})$. Sei nun $\bar{s} \in \bar{S}_1$ dann ist $[\bar{s}, \bar{t}] \in \bar{L}_B$. Das liefert nun, daß $\bar{S}_1$ elementar abelsch ist. Sei nun $\bar{r} \in \bar{L}_B - \mathbf{N}_{\bar{L}_B}(\bar{Y})\langle \bar{t} \rangle$. Sei $\bar{s} \in \bar{S}_1$ mit $\bar{s}^2 = 1$. Dann ist $\chi(\bar{s}) = \bar{s}\bar{s}^{\bar{t}} = [\bar{s}, \bar{t}] \in \bar{L}_B$. Somit ist $\bar{r} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(Z_1)$. Insbesondere ist $[\hat{Y}, \hat{Y}^{\bar{r}}] \neq 1$. Es ist $[\hat{Y}, \bar{Y}^{\bar{r}}] = 1$. Also ist $[\bar{Y}^{\bar{t}}, \bar{Y}^{\bar{t}\bar{r}}] = 1$. Weiter ist $[\bar{Y}, \bar{Y}^{\bar{t}\bar{r}}] = 1$. Also ist $[\bar{Y}\bar{Y}^{\bar{t}}, \bar{Y}^{\bar{r}}\bar{Y}^{\bar{t}\bar{r}}] = 1$. Das widerspricht aber $[\hat{Y}, \hat{Y}^{\bar{r}}] \neq 1$. Somit ist $\bar{L}_B = \mathbf{N}_{\bar{L}_B}(\bar{Y})\langle\bar{t}\rangle$. Insbesondere ist $\bar{L}_B \leqslant N_{\bar{M}}(\hat{Y})$. Da $\hat{Y}/Z(\hat{Y}) = \langle(\bar{L}_B \cap \hat{Y})^{\hat{Y}}\rangle\mathbf{Z}(\hat{Y})/\mathbf{Z}(\hat{Y})$ ist, ist $\hat{Y}$ in R_t enthalten. Da $\bar{Y} \lhd\lhd \bar{M}$ ist, ist $\hat{Y} \lhd\lhd \bar{R}_t$. Das liefert nun, da $\bar{Y}$ abelsche Sylow 2-Untergruppen besitzt, daß $\hat{Y}/\mathbf{Z}(\hat{Y}) \cong L_2(q)$ oder $L_2(q^2)$ ist. Also ist $\bar{Y} \cong \hat{Y} \cong L_2(q^2)$ nach Annahme. Da $\bar{N}_t \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\hat{Y})$ ist, folgt nun mit (3.11), daß $|\bar{N}_t| = q$ ist. Also ist $|\bar{L}_B| = q^3$. Das liefert nun $n = 4$. Weiter haben wir $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{Y} \times \bar{Y}^{\bar{t}} \cong L_2(q^2) \times L_2(q^2)$. Sei nun $\bar{r} \in \mathbf{N}_{\bar{L}_B}(\bar{Y})$. Dann ist $[\bar{r}, \bar{S} \cap \bar{Y}] \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{Y} = 1$. Da $q > 2$ ist, folgt nun, daß $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{E}(\bar{M}))$ gerade Ordnung hat. Somit ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{E}(\bar{M})) \neq 1$. Dann ist aber $\mathbf{E}(\bar{M}) \subseteq \bar{R}_\tau$ für ein $\tau \in \bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{E}(\bar{M}))$. Das widerspricht (3.10).

(4.3) Lemma. *Es enthalte $\mathbf{E}(\bar{M})$ genau eine zu $L_2(q)$ isomorphe Komponente. Ist $\mathbf{E}(\bar{M}) \ncong L_2(q)$, so ist $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{X} \times \bar{Y}$ mit quasi-einfachem $\bar{X}$ und $\bar{Y} \cong L_2(q)$.*

Beweis. Es ist $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{Y} \times \bar{X}$, mit $\bar{Y} \cong L_2(q)$ und $\bar{X} = \mathbf{E}(\bar{X})$. Da $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$, folgt $\bar{L}_B \cap \bar{Y} \neq 1$. Weiter ist $\bar{X} = \langle(\bar{L}_B \cap \bar{X})^{\bar{X}}\rangle$. Also ist $\bar{X} \leqslant \bar{R}_t$, für $\bar{t} \in (\bar{L}_B \cap \bar{Y})^{\#}$. Nach (3.10) ist dann $\bar{X}$ quasieinfach.

(4.4) Lemma. *Sei $\bar{A} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))$ mit $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{A})$. Ist $|\bar{A}|$ ungerade, so ist $\bar{A} = 1$.*

Beweis. Sei $\bar{L} \leqslant \bar{L}_B$ mit $|\bar{L}_B : \bar{L}| = 2$ und $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L}) \neq 1$. Dann operiert $\bar{L}_B$ auf $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L})$. Sei $[\bar{L}_B, \mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L})] \neq 1$. Ist $\bar{t} \in \bar{L}^{\#}$, so ist $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L}) \leqslant \bar{R}_t$. Insbesondere operiert $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L})$ auf $\tilde{V}_t$. Die Operation von $\bar{L}_B$ auf $\tilde{V}_t$ liefert nun, daß $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L})$ auf $\tilde{B}$ operiert. Dann ist aber $\mathbf{C}_{\bar{A}}(\bar{L}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Das ist ein Widerspruch. Also können wir $[\bar{A}, \bar{L}_B] = 1$ annehmen. Es operiert somit $\bar{A}$ auf $\tilde{B}$. Nach (3.5) ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{a}) = 1$ für alle $\bar{a} \in \bar{A}^{\#}$. Also ist $|\bar{A}| \mid q - 1$. Nach [7] gibt es in $\mathrm{Aut}(Q)$ ein Element ρ, $o(\rho) = q - 1$, mit $[\mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\mathbf{Z}(Q)), \rho] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q)) = \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\tilde{Q})$. Weiter ist $\rho \notin \mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\mathbf{Z}(Q))$. Sei nun $\bar{A} \neq 1$. Dann gibt es in $\bar{A}$, ein Element $\bar{h} \neq 1$ von ungerader Ordnung mit $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{h}) \neq 1$ und $[\bar{L}_B, \bar{h}] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$. Das widerspricht nun aber wieder (3.5). Also ist $\bar{A} = 1$.

(4.5) Satz. *Stets ist $\mathbf{E}(\bar{M}) \neq 1$. Weiter gilt eine der folgenden Aussagen:*

(i) $\mathbf{E}(\bar{M})$ *ist quasieinfach.*

(ii) $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{Y} \times \bar{X}$ *mit quasieinfachem* $\bar{X}$ *und* $\bar{Y} \cong L_2(q)$

(iii) $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3$, $\bar{X}_i \cong L_2(q)$, $\bar{X}_i \trianglelefteq \bar{M}_0$.

Beweis. Nach (4.4) ist $\mathbf{E}(\bar{M}) \neq 1$. Enthält $\mathbf{E}(\bar{M})$ keine zu $L_2(q)$ isomorphe Komponente, so folgt (i) mit (4.2). Enthält $\mathbf{E}(\bar{M})$ genau eine zu $L_2(q)$ isomorphe Komponente, so folgt (ii) mit (4.3). Also können wir $\mathbf{E}(\bar{M}) = \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3$ mit $\bar{X}_1 \cong \bar{X}_2 \cong L_2(q)$ und $\mathbf{E}(\bar{X}_3) = \bar{X}_3$ annehmen.

Sei zunächst $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{X}_1)$. Dann ist $\bar{L}_B \cap \bar{X}_1 \neq 1$. Sei $\bar{t} \in (\bar{L}_B \cap \bar{X}_1)^{\#}$, dann ist $\bar{X}_2 \times \bar{X}_3 \leqslant \bar{R}_t$. Also ist $\bar{X}_3 \cong L_2(q)$ nach (3.10). Dann haben wir (iii).

Sei nun $\bar{L}_B \nleqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{X}_1)$. Dann können wir annehmen, daß es ein $\bar{t} \in \bar{L}_B$ gibt, so daß $\bar{X}_1{}^{\bar{t}} = \bar{X}_2$ ist. Wie in (4.2) folgt dann wieder $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{X}_1\bar{X}_2)$. Sei zunächst $[\bar{t}, \bar{X}_3] \neq 1$. Dann gibt es ein $\bar{\tau} \in (\bar{L}_B \cap \bar{X}_3)^{\#}$. Also ist $\langle \bar{X}_1, \bar{t} \rangle \subseteq \bar{R}_\tau$. Da $\bar{X}_1\bar{X}_2 \lhd\lhd \bar{M}$ ist, ist $\bar{X}_1\bar{X}_2 \lhd\lhd \bar{R}_\tau$. Mit (3.10) erhalten wir dann $\bar{R}_\tau/\bar{N}_\tau = \bar{X}_1\bar{X}_2$. Das liefert nun aber den Widerspruch $[\bar{t}, \bar{X}_1\bar{X}_2] \leqslant \bar{N}_\tau$. Also haben wir $[\bar{t}, \bar{X}_3] = 1$ und $\bar{L}_B \cap \bar{X}_3 = 1$. Nun ist aber $\bar{X}_3 \times \mathbf{C}_{\bar{X}_1\bar{X}_2}(\bar{t}) \leqslant \bar{R}_t$. Das liefert aber $\bar{X}_3 \cap \bar{L}_B \neq 1$. Damit ist das Lemma bewiesen.

5. Die Operation von R auf $\underset{\sim}{Q}$

(5.1) Lemma. *Sei $R/N \cong Sp(2m, q)$ oder $\Omega^{\pm}(2m, q) \ncong \Omega^{+}(4, q)$. Sei weiter $C = B^m$ mit $m \in M$, so daß $\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle \subseteq \tilde{V}$ eine hyperbolische Ebene ist. Dann ist $\bar{N} = (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_C \cap \bar{N})$ mit $|\bar{L}_B \cap \bar{L}_C| = q$. Weiter ist $\bar{N}/(\bar{L}_B \cap \bar{L}_C)$ ein R/N-Modul gemäß* (2.1).

Beweis. Es ist $\bar{R} = \langle \bar{L}_B, \bar{L}_C \rangle$. Also ist $[\bar{R}, \bar{N}] \leqslant (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_C \cap \bar{N})$. Nach (3.11) ist dann $\bar{N} = (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_C \cap \bar{N})$. Sei nun $x \in \bar{L}_B{}^{\#}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$. Dann ist $\langle \tilde{C}, \tilde{C}^x \rangle$ eine hyperbolische Ebene in $\tilde{V}$. Da $\bar{L}_B \cap \bar{L}_C \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$, folgt $\bar{L}_B \cap \bar{L}_C = \bar{L}_C \cap (\bar{L}_C)^x$. Weiter ist $\bar{N} = (\bar{L}_C \cap \bar{N})((\bar{L}_C)^x \cap \bar{N})$. Somit ist $\bar{N}/(\bar{L}_B \cap \bar{L}_C) = (\bar{L}_C \cap \bar{N}/\bar{L}_B \cap \bar{L}_C) \oplus ((\bar{L}_C)^x \cap \bar{N})/(\bar{L}_B \cap \bar{L}_C)$. Insbesondere ist $\mathbf{C}_{\bar{N}/\bar{L}_B \cap \bar{L}_C}(\bar{L}_B) = \bar{N} \cap \bar{L}_B/\bar{L}_B \cap \bar{L}_C$. Mit (2.1) folgt nun, daß $\bar{N}/\bar{L}_B \cap \bar{L}_C$ wie behauptet ist.

Nach (3.11) ist $|\bar{L}_B \cap \bar{L}_C| \leqslant q$. Da $|\bar{N}|$ und $|\bar{L}_B \cap \bar{N}|$ q-Potenzen sind, folgt nun $|\bar{L}_B \cap \bar{L}_C| = q$.

(5.2) Lemma. *Sei $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q) \ncong \Omega^{+}(4, q)$. Sei $W = \mathbf{C}_Q(V)$ und $B^m = C \leqslant V$, so daß $\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$ eine hyperbolische Ebene in $\tilde{V}$ ist. Dann gilt*:

(a) *$W = (Q_B \cap W)(Q_C \cap W)$ und $[\bar{N}, \tilde{W}] \leqslant \tilde{V}$.*

(b) *W/V ist ein $F_q(R/N)$-Modul gemäß* (2.1).

(c) *$\tilde{V}$ und $\tilde{Q}/\tilde{W}$ sind äquivalente $F_q(R/N)$-Moduln. Dabei ist $\tilde{x}\tilde{W} \to [\tilde{x}, \bar{t}]$ ein R-Isomorphismus von $\tilde{Q}/\tilde{W}$ auf $\tilde{V}$. Weiter ist $\tilde{V}$ der natürliche R/N-Modul.*

Beweis. (c) ist die Aussage aus (3.10). Beachte $\tilde{V}^* \cong \tilde{V}$.

Nach (3.3) ist $|Q \cap Q_B| = q^{n+1}$. Da $[\widetilde{Q \cap Q_B}, \bar{L}_B] = \tilde{B} \leqslant \tilde{V}$ ist, folgt mit (c), daß $|(Q \cap Q_B)W/W| \leqslant q$ ist. Es ist $[\tilde{Q}/\tilde{W}, \bar{L}_B, \bar{L}_B] \leqslant (Q \cap Q_B)W/W$. Also ist $|(Q \cap Q_B)W/W| = q$. Dann ist $|Q_B \cap W| = q^n$. Nun ist $[\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap Q}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] \leqslant \tilde{B} \cap (\widetilde{Q_C \cap Q})$. Nach Wahl von C ist $B \cap Q_C = 1$. Also ist $[Q_B \cap Q_C \cap Q, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Die Struktur von $\bar{R}/\bar{N}$ liefert $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^{2m-2}$. Also ist $|\bar{L}_B \cap \bar{N}| = q^{n-2m+1}$. Weiter ist $|\widetilde{V \cap Q_B}| = q^{2m-1}$ und $[\widetilde{V \cap Q_B},$

$\bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Die Struktur von Q_B liefert $\widetilde{V \cap Q_B} = \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Somit ist $Q_B \cap Q_C \cap Q \leqslant V$. Somit haben wir $|\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W}| = q^{2m-2}$. Nach (c) ist $|\tilde{W}| = q^{2n-2m}$. Nun folgt $(Q_B \cap W)(Q_C \cap W) = W$. Weiter ist $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \widetilde{Q_C \cap W}] \leqslant \widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W} \leqslant \tilde{V}$. Also ist $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \tilde{W}] \leqslant \tilde{V}$. Nach (5.1) ist $\bar{N} = (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_C \cap \bar{N})$. Das liefert $[\bar{N}, \tilde{W}] \leqslant \tilde{V}$. Somit haben wir (a).

Es ist $(\widetilde{Q_B \cap W})\tilde{V} \cap (\widetilde{Q_C \cap W})\tilde{V} = \tilde{V}$. Also ist $\tilde{W}/\tilde{V} = (\widetilde{Q_B \cap W})\tilde{V}/\tilde{V} \oplus (\widetilde{Q_C \cap W})\tilde{V}/\tilde{V}$. Sei nun $\bar{y} \in \bar{L}_B - \bar{N}$, $\bar{y}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$. Dann ist $\langle \tilde{C}, \tilde{C}^{\bar{y}} \rangle$ eine hyperbolische Ebene in $\tilde{V}$. Das liefert nun mit (a) $\tilde{W}/\tilde{V} = (\widetilde{Q_C \cap W})\tilde{V}/\tilde{V} \oplus (\widetilde{(Q_C)^{\bar{y}} \cap W})\tilde{V}/\tilde{V}$. Also ist $(\widetilde{Q_B \cap W})\tilde{V}/\tilde{V} = \mathbf{C}_{\tilde{W}/\tilde{V}}(\bar{y}) = \mathbf{C}_{\tilde{W}/\tilde{V}}(\bar{L}_B)$. Somit sind die Voraussetzungen von (2.1) erfüllt.

In Aut(Q) gibt es ein Element ρ mit $o(\rho) = q - 1$, $[\rho, Q] = Q$ und $[\bar{R}, \rho] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$ (siehe [7, Satz 4]). Nach [18, II(3.11)] ist dann $\tilde{W}/\tilde{V}$ ein $F_q(R/N)$-Modul.

(5.3) Lemma. *Sei $R/N \cong Sp(2m, q)$, $m \geqslant 2$. Sei $C = B^m \leqslant V$, so daß $\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$ eine hyperbolische Ebene ist. Setze $V_1 = (Q_B \cap Q)V \cap (Q_C \cap Q)V$, $W = \mathbf{C}_Q(V)$ und $W_1 = \mathbf{C}_Q(V_1)$. Dann gilt*:

(a) $|\tilde{V}_1 : \tilde{V}| = q = |\tilde{W} : \tilde{W}_1|$ *und* $n \equiv 1(2)$.

(b) $W_1 = (Q_B \cap W_1)(Q_C \cap W_1)$ *und* $[\bar{N}, \tilde{W}_1] \leqslant \tilde{V}_1$.

(c) $\tilde{W}_1/\tilde{V}_1$ *ist der in* (2.1) *beschriebene* $F_q(R/N)$-*Modul.*

(d) $[\tilde{V}_1, \bar{N}] = 1$ *und* $[\tilde{Q}, \bar{N}] \leqslant \tilde{W}_1$. *Weiter sind* $\tilde{V}_1$ *und* $\tilde{Q}/\tilde{W}_1$ *unzerlegbare* $F_q(R/N)$-*Moduln.*

(e) $\tilde{V}$ *und* $\tilde{Q}/\tilde{W}$ *sind äquivalente* $F_q(R/N)$-*Moduln. Die Abbildung* $\tilde{x}\tilde{W} \to [\tilde{x}, \bar{t}]$ *ist ein* $\bar{R}$-*Isomorphismus von* $\tilde{Q}/\tilde{W}$ *auf* $\tilde{V}$.

Beweis. (e) ist die Aussage von (3.10).

Nach (2.1) ist $\bar{R} = \langle \bar{L}_B, \bar{L}_C \rangle$. Es ist $|(Q_B \cap Q)V : Q_B \cap Q| = q$ und $|V : V \cap Q_B \cap Q_C| = q^2$. Somit ist $V_1 = (V_1 \cap Q_B \cap Q_C)V$. Es ist $[\widetilde{V_1 \cap Q_B \cap Q_C}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] \leqslant \tilde{B} \cap (\widetilde{Q_C \cap V_1}) = 1$. Nach (5.1) ist $\bar{N} = (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_C \cap \bar{N})$. Also ist $[\tilde{V}_1, \bar{N}] = 1$.

Die Struktur von R/N liefert $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^{2m-1}$. Also ist $|\mathbf{C}_{(\widetilde{Q \cap Q_B})}(\bar{L}_B \cap \bar{N})| \leqslant q^{2m}$. Das liefert $|\widetilde{V_1 \cap Q_B}| \leqslant q^{2m}$ und somit $|V_1 : V| \leqslant q$. Es ist $|\widetilde{Q_B \cap W}| = q^{n-1}$. Weiter ist $\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W} \leqslant \widetilde{V_1 \cap Q_B \cap Q_C}$, da $[\widetilde{Q_B \cap Q_C}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$ ist. Also ist $q^{2m-2} \leqslant |\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W}| \leqslant q^{2m-1}$. Das liefert $q^{2n-2m} \geqslant |(\widetilde{Q_B \cap W}) \times (\widetilde{Q_C \cap W})| \geqslant q^{2n-2m-1}$. Da $(\widetilde{Q_B \cap W})(\widetilde{Q_C \cap W}) \leqslant \tilde{W}_1$, ist $|\tilde{W}_1| \geqslant q^{2n-2m-1}$.

Sei nun zunächst $V = V_1$. Dann ist $W_1 = W$. Also ist $|\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W}| =$

q^{2m-2}. Das liefert $\tilde{W} = (\widetilde{Q_B \cap W})(\widetilde{Q_C \cap W})$. Insbesondere ist $\tilde{W}/\tilde{V}$ ein $F_2(R/N)$-Modul gemäß (2.1). Also ist $n - 2m$ gerade. Nach (5.1) ist $\bar{N}/(\bar{L}_B \cap \bar{L}_C)$ ein Modul für R/N gemäß (2.1). Somit ist $|\bar{N}| = q^x$ mit $x = a2^m + 1$, a geeignet. Das liefert nun $|\bar{L}_B| = q^{a2^{m-1}+1+2m-1} = q^{n-1}$. Insbesondere ist n ungerade. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $V \neq V_1$. Die Struktur von Q liefert dann $|\tilde{W}_1| = q^{2n-2m-1}$. Insbesondere ist $\tilde{W}_1 = (\widetilde{Q_B \cap W})(\widetilde{Q_C \cap W}) = (\widetilde{Q_B \cap W_1})(\widetilde{Q_C \cap W_1})$. Das liefert nun $|\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W}| = q^{2m-1}$ und $|\widetilde{V_1 \cap Q_B}| = q^{2m}$. Also ist $|\tilde{V}_1 : \tilde{V}| = q = |\tilde{W} : \tilde{W}_1|$. Weiter ist n ungerade. Somit haben wir (a).

Es ist $[\widetilde{Q_C \cap W_1}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] \leqslant \widetilde{Q_B \cap Q_C \cap W_1} \leqslant \tilde{V}_1$. Nach (5.1) ist dann $[\tilde{W}_1, \bar{N}] \leqslant \tilde{V}_1$. Somit haben wir (b).

Sei $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$, $o(\rho) = q - 1$, mit $[\bar{R}, \rho] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$. Dann operiert ρ auf $\tilde{V}$ und $\tilde{W}$. Weiter ist $\mathbf{C}_{\tilde{W}_1}(\bar{N}) = \tilde{V}_1$. Nach (3.5) ist $\tilde{W}_1/\tilde{V}_1$ ρ-invariant. Nach [18, II(3.11)] sind $\tilde{V}_1$ und $\tilde{W}_1/\tilde{V}_1$ beide $F_q(R/N)$-Moduln. Somit haben wir (c).

Wegen $[\tilde{V}_1, \bar{N}] = 1$ ist dann $[\tilde{Q}, \bar{N}] \leqslant \tilde{W}_1$. Sei $\tilde{V}_1$ direkt zerlegbar. Dann ist $\tilde{V}_1 = \tilde{V} \oplus \mathbf{C}_{\tilde{V}_1}(\bar{R})$. Das widerspricht (3.4). Also sind $\tilde{V}_1$ und $\tilde{Q}/\tilde{V}_1$ unzerlegbare $\bar{R}$-Moduln.

(5.4) Lemma. *Sei $R/N \simeq Sp(2m, q)$, $m \geqslant 2$. Dann ist $|\bar{N}| \neq q$.*

Beweis. Sei $|\bar{N}| = q$. Dann folgt $n - 1 = 2m$. Also ist $|\tilde{Q}| = q^{4m+2}$. Also ist $\tilde{V}_1 = \tilde{W}_1$ nach (5.3). Da $Sp(2m, q) \not\subseteq Sl_2(q)$, folgt nun $[\tilde{W}, \bar{R}] \leqslant \tilde{V}$. Also ist $[\bar{N}, \tilde{W}] = 1$. Nach (2.2) ist dann $\mathbf{C}_{\tilde{W}}(\bar{R}) \neq 1$. Das widerspricht aber (3.5).

(5.5) Lemma. *Sei $R/N \simeq SL_m(q)$, $m \geqslant 2$. Sei $\tilde{U} = [\tilde{Q}, \bar{t}]$, $\tilde{T} = [\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}, \bar{t}]$ und Q_1 das volle Urbild von $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t})$. Dann gilt:*

(a) $\tilde{U} = \widetilde{\mathbf{Z}(Q_1)}$.

(b) *$\tilde{V} \leqslant \tilde{T}$, $T \leqslant Q_\alpha$ für jedes $\alpha \in V^\#$. Es ist $\tilde{T}/\tilde{V}$ ein trivialer R/N-Modul.*

(c) *$\tilde{U}/\tilde{T}$ ist der duale R/N-Modul von $\tilde{V}$.*

(d) *$\tilde{Q}/\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t})$ ist äquivalent zu $\tilde{U}$ als $F_q(\bar{R})$-Modul. Es ist $\tilde{x}\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t}) \to [\tilde{x}, \bar{t}]$ ein $\bar{R}$-Isomorphismus von $\tilde{Q}/\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t})$ auf $\tilde{U}$.*

Beweis. Es ist $[Q_1, \bar{t}, Q] \leqslant [\mathbf{Z}(Q), Q] = 1 = [\mathbf{Z}(Q), \bar{t}] \geqslant [Q_1, Q, \bar{t}]$. Nach dem 3-Untergruppenlemma ist dann $[Q, \bar{t}] \leqslant \mathbf{Z}(Q_1)$. Das liefert $\tilde{U} \leqslant \widetilde{\mathbf{Z}(Q_1)}$. Wegen $|\widetilde{\mathbf{Z}(Q_1)}| = |Q : Q_1|$, folgt (a).

Sei $\tilde{T} = 1$. Dann ist $\tilde{U} \leqslant \tilde{V}$. Da $\bar{R}$ auf $\tilde{U}$ operiert, folgt $\tilde{U} = \tilde{V}$. Es ist $\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)} = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(t)$. Die Abbildung $\tilde{x}\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)} \to [\tilde{x}, \bar{t}]$ ist ein $\bar{R}$-Isomorphismus von $\tilde{Q}/\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}$ auf $\tilde{V}$. Da $\tilde{Q}/\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}$ dual zu $\tilde{V}$ ist, folgt nun, daß $\tilde{V}$ selbstdual ist. Also ist $m = 2$. Somit ist $|[\tilde{Q}, \bar{t}]| = q^2$. Dann operiert $\bar{t}$ aber als Involution vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $\tilde{T} \neq 1$. Da $\bar{R}$ auf $\tilde{T}$ operiert, liefert (3.5) $\tilde{V} \leqslant \tilde{T}$. Nach (3.10) ist $V \subseteq Q_\alpha$ für alle $\alpha \in V^{\#}$. Weiter ist $\bar{t} \in \bar{L}_\alpha$. Somit ist $\tilde{T} = \widetilde{[\mathbf{C}_Q(V), \bar{t}]} \subseteq \widetilde{[\mathbf{C}_Q(\alpha), \bar{t}]} \leqslant \widetilde{Q \cap Q_\alpha}$. Insbesondere ist $\tilde{T} \subseteq \tilde{Q}_B$. Also ist $[\bar{L}_B, \tilde{T}] \leqslant \tilde{B} \leqslant \tilde{V}$. Das liefert $[\bar{R}, \tilde{T}] \leqslant \tilde{V}$. Somit haben wir (b).

Sei $\chi: \tilde{x} \to [\tilde{x}, \bar{t}]$. Dann ist χ ein $\bar{R}$-Homomorphismus von $\tilde{Q}$ auf $\tilde{U}$. Weiter ist $\chi(\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}) \doteq \tilde{T}$. Somit ist $\chi_{|Q/\mathbf{C}_Q(V)}$ ein Homomorphismus von $Q/\mathbf{C}_Q(V)$ auf $\tilde{U}/\tilde{T}$. Da $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t}) \subseteq \widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}$ ist, ist $\chi_{|Q/\mathbf{C}_Q(V)}$ sogar ein Isomorphismus. Da $Q/\mathbf{C}_Q(V)$ dual zu $\tilde{V}$ ist haben wir somit (c) und (d).

(5.6) LEMMA. *Es ist $R/N \cong \Omega^{\pm}(4, q)$ oder $\tilde{B}^{\bar{R}} = \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$.*

Beweis. Ist $R/N \cong SL_m(q)$ oder $Sp(2m, q)$, so ist R/N transitiv auf den 1-dimensionalen Unterräumen von $\tilde{V}$. Sei $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$, $o(\rho) = q - 1$ und $[\rho, \bar{R}] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$. Dann operiert ρ auf $\tilde{B}$. Also operiert ρ auf jedem Element aus $\tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$. Insbesondere ist $\tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$ die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\tilde{V}$. Somit haben wir die Behauptung.

Sei also $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$. Weiter sei $\tilde{B}^{\bar{R}} \neq \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$. Dann ist $\tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$ die Menge der 1-dim. Unterräume von $\tilde{V}$. Sei nun $\tilde{C} \subseteq \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V} - \tilde{B}^{\bar{R}}$. Weiter sei C in $V \cap Q_B$ enthalten. Nach [25, (2.18)] ist $B \subseteq Q_C$ und $\langle Q_B, Q_C\rangle/\mathbf{O}_2(\langle Q_B, Q_C\rangle) \cong L_2(q)$. Weiter ist $B \times C$ der natürliche $L_2(q)$-Modul. Da $[L_B, C] \neq 1$ ist folgt $\langle L_B, L_C\rangle/\mathbf{O}_2(\langle L_B, L_C\rangle) \cong L_2(q)$. Dann gibt es ein $D \subseteq B \times C$, $C \neq D \neq B$ und $D \sim B$ in $\langle L_B, L_C\rangle$. Also gibt es ein $y \in Q_D \cap M$ mit $B^y \neq B$. Wähle nun D so, daß $B^y = C$ ist. Setze $\tilde{V}_0 = \langle \tilde{E} \mid \tilde{E} \in \tilde{B}^{\bar{R}}, (\tilde{E}, \tilde{D}) = 0\rangle$. Wobei (,) das Skalarprodukt auf $\tilde{V}$ ist. Also ist $E \subseteq Q_D$. Das liefert nun $\tilde{V}_0 \subseteq \widetilde{Q \cap Q_D}$. Da $\bar{y} \in \mathbf{N}(\widetilde{Q \cap Q_D})$ ist, folgt $\tilde{V}_0 \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{y}}$. Es ist $|\tilde{V} : \tilde{V}_0| = q$ und $|\tilde{V}_0 : \mathbf{C}_{\tilde{V}_0}(\bar{y})| \leqslant q$.

Sei nun $m \geqslant 3$. Dann gibt es ein hyperbolisches Paar $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \tilde{B}^{\bar{R}}$ mit $(\tilde{B}_1)^y = \tilde{B}_1$ und $(\tilde{B}_2)^y = \tilde{B}_2$. Es ist $(\tilde{B}_1)^y \in (\tilde{B}^{\bar{R}})^y = (\tilde{B}^y)^{\bar{R}^y}$. Also ist $\langle \tilde{B}_1, \tilde{B}_2\rangle$ auch eine hyperbolische Ebene in $\tilde{V}^y$. Nach (2.1) ist dann $R = \langle L_{B_1}, L_{B_2}\rangle = R^y$. Somit ist $y \in \mathbf{N}(R)$. Somit ist $L_B \sim L_C$ in $\mathbf{N}_M(R)$. Das widerspricht aber der Wahl von C. Also ist $m \leqslant 2$.

(5.7) LEMMA. *Sei $R/N \cong SL_m(q)$. Es gebe ein $t \in \bar{t}$ mit $t \sim b \in B$ in G. Weiter sei $B \subseteq Q_t$. Dann ist $\tilde{V} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_t}$.*

Beweis. Sei zunächst $t\mathbf{Z}(Q) \cap t^Q \neq t\mathbf{Z}(Q)$. Sei $X = \langle r \mid r \in \mathbf{Z}(Q)$ und $t \sim tr$ in $Q\rangle$. Dann ist $X < \mathbf{Z}(Q)$. Setze $\hat{Q} = Q/X$. Sei nun $r \in R$ mit $[t, r] \in \mathbf{C}_{\hat{Q}}(t) - [\hat{Q}, t]$. Nach (5.5) ist $[\hat{Q}, \bar{t}] = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\hat{Q}}(\bar{t}))$. Also gibt es ein $\hat{y} \in \mathbf{C}_{\hat{Q}}(\bar{t})$

mit $[t, r]^y = [t, r]z$ mit $z \in \widehat{\mathbf{Z}(Q)}^{\#}$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $R = Q\mathbf{C}_R(t\mathbf{Z}(Q))$. Weiter ist $Q\mathbf{C}_R(t)$ ein Normalteiler vom Index höchstens q in R. Somit deckt $\mathbf{C}_R(t)$ die Gruppe R/N. Da $\tilde{B} \subseteq \tilde{Q}_t$ ist, folgt nun $\tilde{V} \subseteq \tilde{Q}_t$.

Sei nun $t^Q \cap t\mathbf{Z}(Q) = t\mathbf{Z}(Q)$. Setze $Q_1 = \mathbf{C}_Q(t)$ und $W = Q \cap Q_t \cap [Q, t]$. Nach (5.5) ist $[Q, t] = \mathbf{Z}(Q_1)$. Nach (2.6) ist $\mathbf{Z}(Q) \cap Q_t = 1$. Also ist $Q \cap Q_t \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t))$. Somit ist $| Q \cap Q_t : W | \leqslant q$. Sei nun $\alpha \in W$. Ist $t \not\sim t\alpha$, so gibt es ein $x \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ mit $t \sim tx\alpha$. Es ist $\alpha \sim t\alpha$ in Q_t. Also ist stets $\alpha \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ in G. Dann ist $t \in Q_\alpha$. Weiter ist auch $\mathbf{Z}(Q) \subseteq Q_\alpha$. Also ist $\bar{t} \in \bar{L}_\alpha$. Dann ist $\tilde{\alpha} \in \tilde{V}$. Also ist $\tilde{W} \leqslant \tilde{V}$. Ist $\tilde{W} = \tilde{V}$, so sind wir fertig. Sei also $\tilde{W} < \tilde{V}$.

Es ist $[Q_B \cap Q_t \cap M, \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant Q \cap Q_t$. Nach (5.5) ist $[Q, t] = \mathbf{Z}(Q_1) \leqslant \mathbf{C}_Q(t)$. Das liefert $[Q, t, Q_B \cap Q_t \cap M] \leqslant W < V$. Sei nun zunächst $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M} \nleqslant \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist nach (5.5)(c) $[\tilde{Q}, \bar{t}, \overline{Q_B \cap Q_t \cap M}] \nleqslant \tilde{V}$. Das widerspricht aber $[\tilde{Q}, \bar{t}] = \widetilde{[Q, t]}$. Also ist $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M} \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Es ist $B \subseteq Q_t$. Also ist nach (3.5) $| Q_B \cap Q_t | = q^{n+1}$. Somit ist $| \overline{Q_B \cap Q_t \cap M} | \geqslant q^{n-m-1}$, da $| Q \cap Q_t | < q^{m+1}$ ist. Andererseits ist $| \bar{L}_B \cap \bar{N} | = q^{n-m}$. Da nach (2.6) mit α stets $\mathbf{Z}(Q_\alpha)$ in Q_t enthalten ist, folgt, daß $| W |$ eine q-Potenz ist. Also ist sogar $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M} = \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Insbesondere ist dann $Q \cap Q_t = Q \cap Q_t \cap Q_B$. Es ist $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \tilde{V}$. Da $Q_t \cap Q_B$ elementar abelsch ist und somit $\bar{L}_B \cap \bar{N}$ die Gruppe $Q \cap Q_t \cap Q_B$ zentralisiert, folgt nun $Q \cap Q_t \leqslant V$. Da $| Q_t \cap Q | = | V |$ ist, folgt nun die Behauptung.

6. Der Fall $| \bar{N} | = q$

Es gelten weiterhin die Voraussetzungen von Sektion 4. Weiter sei für ein $\bar{t} \in \bar{L}_B^{\#}$ die Gruppe $\bar{N}_t$ von der Ordnung q. Mit $\bar{R}$ bezeichnen wir $\bar{R}_t$.

(6.1) Lemma. *Es ist $R/N \ncong SL_m(q)$.*

Beweis. Sei $R/N \cong SL_m(q)$. Dann ist $q^{n-1} = | \bar{L}_B | = q^m$. Also ist $q^{2m-2} = q^{2n} = | \tilde{Q} | \geqslant q^{4m}$ nach (5.5). Das liefert einen Widerspruch.

(6.2) Lemma. *Ist $R/N \cong \Omega^{\pm}(4, q)$, so ist $n = 4$.*

Beweis. Es ist $q^{n-1} = | \bar{L}_B | = q^3$. Also ist $n = 4$.

(6.3) Lemma. *Sei $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$, $m \geqslant 3$, so ist $n = 2m$. Weiter ist $\bar{N}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ bezüglich $\bar{M}$.*

Beweis. Es ist $q^{n-1} = | \bar{L}_B | = q^{2m-1}$. Also ist $n = 2m$. Da $q > 2$ ist, folgt $\bar{R} = \bar{N} \times \bar{X}$ mit $\bar{X} \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$. Da $\bar{L}_B$ schwach abgeschlossen ist, folgt für alle $\bar{t} \in \bar{N}^{\#}$ stets $C_{\bar{M}}(\bar{t}) = \bar{R}(C_{\mathbf{N}_{\bar{N}}(\bar{L}_B)}(\bar{t}))$. Also ist $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{B}^{\bar{R}})$. Da $\bar{R} \trianglelefteq \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$, folgt $\bar{X} \lhd \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$. Sei $\bar{K} = C_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})}(\bar{X})$. Dann operiert $\bar{K}$ auf $\tilde{B}$. Nach

[25, (2.18)] gibt es ein Element von der Ordnung $q - 1$ in G, das transitiv auf $B^{\#}$ operiert. Anwendung von [7] liefert nun $| \mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(B)| = r(q-1), 2^r \mid c$. Also ist $| \bar{K}/\mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B})| \mid r(q-1)$. Da $n = 2m$ ist und $\tilde{V}$ zu Q/V äquivalent ist, liefert nun (2.4), daß $\bar{N} = \mathbf{C}_{\bar{K}}(\tilde{B})$ ist. Also ist $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N})$ für alle $\bar{t} \in \bar{N}^{\#}$. Es ist weiter $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N})/(\bar{K} \times \bar{X}) \lesssim \mathrm{Aut}(\Omega^{\pm}(2m, q))$.

Sei $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B - \bar{N}$. Dann ist $\bar{t}^{\bar{g}} \notin \bar{X}$. Da $\bar{L}_B \subseteq \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}^{\bar{g}})$ ist, können wir $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ annehmen. Also ist $\bar{g} \in \mathbf{N}(\tilde{B})$. Insbesondere ist dann $\bar{g} \in \mathbf{N}(\widetilde{Q \cap Q_B})$. Da $|\widetilde{Q \cap Q_B}| = q^{2m}$ ist, folgt $|\widetilde{Q \cap Q_B} : \tilde{V} \cap \tilde{Q}_B| = q$. Also ist $|\widetilde{V \cap Q_B} : (\widetilde{V \cap Q_B}) \cap (\widetilde{V \cap Q_B})^{\bar{g}}| \leqslant q$. Dann ist $|\tilde{V} : \widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}| \leqslant q^2$. Es gibt ein $\bar{n} \in \bar{N}$, so daß $\bar{n}\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B \cap \bar{X}$ ist. Also ist $\bar{n}\bar{t}^{\bar{g}}$ vom Typ a_2 oder c_2 auf $\tilde{V}$. Da $\bar{n}\bar{t}^{\bar{g}}$ die Gruppe $\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$ zentralisiert, folgt nun $|\tilde{V} : \widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}| = q^2$.

Es enthalte $\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$ ein hyperbolisches Paar $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \tilde{B}^{\bar{R}}$. Nach (5.6) ist $\tilde{B}^{\bar{R}} = \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$. Also ist $\bar{R} = \langle \bar{L}_{B_1}, \bar{L}_{B_2} \rangle \leqslant \bar{R}^{g}$. Somit ist $g \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{R})$. Dann ist aber $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{N}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{N}$ stark abgeschlossen.

Es enthalte nun $\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$ kein hyperbolisches Paar. Dann ist $m = 3$ und $n = 6$. Weiter ist $\tilde{V}$ vom $(-)$-Typ und $\bar{n}\bar{t}^{\bar{g}}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$. Es ist $\bar{N} \cap \bar{N}^{\bar{g}} = 1$. Also gibt es in $\bar{N} \times \bar{N}^{\bar{g}}$ genau $q(q-1)$ Elemente, die zu Elementen aus $\bar{N}^{\#}$ in $\bar{M}$ konjugiert sind. Die Struktur von $N_{\bar{R}}(\bar{L}_B)$ liefert nun, daß es genau $(q-1) + (q^2+1)(q-1)^2 = (q-1)(q^2-q+1)q$ Involutionen in $\bar{L}_B$ gibt, die in $\bar{M}$ zu Involutionen aus $\bar{N}$ konjugiert sind. Es ist somit $q(q^2-q+1)$ ein Teiler von $|\bar{t}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B|$. Es ist $q^6 - 1 = (q^3-1)(q+1)(q^2-q+1)$. Da $q > 2$ ist, gibt es nach [1, Korollar 2] eine Primzahl p mit $p \mid q^6 - 1$ aber $p \nmid 2^x - 1$ für $2^x < q^6$. Dann ist $p \mid q^2 - q + 1$. Also ist $p \mid |\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)/\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)| \mid |GL(5s, 2)|$, wobei $q = 2^s$ ist. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist auch in diesem Falle $\bar{N}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$.

(6.4) Lemma. *Sei $m \geqslant 3$ und $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$. Dann ist $\langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q)$.*

Beweis. Nach (6.2) ist $\bar{N}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ bezüglich $\bar{M}$. Insbesondere ist $\bar{N}$ eine TI-Gruppe. Sei nun $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $[\bar{N}, \bar{N}^{\bar{g}}] = 1$. Betrachte $\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$. Sei $\tilde{A} \subseteq \widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$ mit $\tilde{A} \in \tilde{B}^{\bar{R}}$. Nach (5.6) ist dann $\bar{L}_A \leqslant \bar{R}^{\bar{g}}$ und $\bar{N}^{\bar{g}} \leqslant \bar{L}_A$. Da $\bar{N} \leqslant \bar{L}_A$ ist, folgt nun $\bar{N} = \bar{N}^{\bar{g}}$.

Es enthalte nun $\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$ kein solches $\tilde{A}$. Dann ist $|\widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}| \leqslant q^2$. Sei $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{N}^{\bar{g}}$ mit $[\tilde{V}, \bar{t}^{\bar{g}}] = 1$. Dann ist $[\bar{R}, \bar{t}^{\bar{g}}] \leqslant \mathbf{C}_{\bar{R}}(\tilde{V}) = \bar{N}$. Also ist $[\bar{X}, \bar{t}^{\bar{g}}] = 1$. Da $n = 2m$ ist, liefert (2.4) nun $\bar{N} = \bar{N}^{\bar{g}}$. Sei also $[\tilde{V}, \bar{t}^{\bar{g}}] \neq 1$. Wegen $[\tilde{V}, \bar{N}^{\bar{g}}] \leqslant \widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$, folgt nun $|[\tilde{V}, \bar{t}^{\bar{g}}]| = q$. Nach (6.3) und (5.2) ist dann auch $|[\bar{t}^{\bar{g}}, \tilde{Q}]\tilde{V}/\tilde{V}| = q$. Da $|[\bar{t}^{\bar{g}}, \tilde{Q}]| = q^{2m}$ ist, folgt jetzt $|[\bar{t}^{\bar{g}}, \tilde{Q}] \cap \tilde{V}| = q^{2m-1}$. Das widerspricht aber $[\bar{t}^{\bar{g}}, \tilde{Q}] \cap \tilde{V} \leqslant \widetilde{V \cap V^{\bar{g}}}$.

Somit haben wir insgesamt gezeigt, daß $\bar{N}$ in $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{N})$ schwach abgeschlossen ist. Anwendung von [20, Korollar B] liefert nun $\langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q)$.

(6.5) SATZ. *Ist* $|\bar{N}| = q$, *so ist* $n = 4$ *und* $R/N \cong \Omega^{\pm}(4, q)$ *oder* $n = 2m$ *und* $\bar{R} = \bar{N} \times \bar{X}$, *wobei* $\bar{X} \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$ *ist. Im letzten Fall ist* $\bar{X} \trianglelefteq \bar{M}$ *und* $L_2(q) \cong \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}) \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z}(Q))$. *Es ist* $M/\mathbf{C}(\mathbf{Z}(Q))$ *eine Frobeniusgruppe der Ordnung* $(q - 1)r$ *mit* $2^r \mid q$.

Beweis. Nach (6.1) und (5.4) ist $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$. Sei $m \geqslant 3$. Nach (6.4) ist $\langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle \cong L_2(q)$. Da $\bar{N}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle$ ist, folgt $\bar{M} = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N}) \langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle$. Insbesondere ist $\bar{X} \trianglelefteq M$. Nach (2.4) ist $\langle \bar{N}^{\bar{M}} \rangle = \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}) \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z}(Q))$. Nach [7, Satz 4] ist $M/\mathbf{C}(\mathbf{Z}(Q))$ eine Frobeniusgruppe der Ordnung $r(q - 1)$ mit $2^r \mid q$.

7. DER FALL $R/N \cong \Omega^{\pm}(2m, q)$

In diesem Paragraphen gelten weiter die Voraussetzungen von Sektion 4. Weiter sei für ein $t \in L_B$ die Gruppe R_t/N_t zu $\Omega^{\pm}(2m, q) \not\cong \Omega^{+}(4, q)$ isomorph. Setze $R = R_t$ und $N = N_t$. Es sei $\tilde{A} \in \tilde{B}^{\bar{R}}$ mit $\langle L_A, L_B \rangle = R$. Weiter sei $|N| > q$.

(7.1) LEMMA. *Es gilt eine der folgenden Aussagen*:

(a) *Es gibt ein* $\bar{s} \in Z(\bar{R})$ *mit* $\bar{s}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \not\subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$.

(b) $R/N \cong \Omega^{-}(6, q)$ *und* $n = 10$.

(c) $R/N \cong \Omega^{+}(6, q)$ *und* $n = 10$.

(d) $R/N \cong \Omega^{+}(8, q)$ *und* $n = 12$.

(e) $R/N \cong \Omega^{-}(4, q)$, $\Omega^{+}(6, q)$ *oder* $\Omega^{+}(8, q)$. *Weiter gibt es ein* $\bar{x} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \cap \bar{t}^{\bar{M}}$ *mit* $[\tilde{W}, \bar{x}] \not\subseteq \tilde{\bar{V}}$. *Es ist* $[\tilde{\bar{V}}, \bar{x}] = 1$ *für alle* $\bar{x} \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$.

Beweis. Angenommen falsch. Dann ist $\bar{t}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Also ist $\bar{F} = \langle \bar{t}^{\bar{g}} \mid \bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B{}^{\bar{g}} \leqslant \bar{R}, \bar{g} \in \bar{M} \rangle \subseteq \bar{N}$. Weiter ist $\bar{F}' \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei nun $\bar{x} = \bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) - \bar{F}$. Da $\tilde{\bar{V}} = [\tilde{Q}, \bar{t}]$ ist, folgt $[\tilde{\bar{V}}, \bar{x}] \leqslant \tilde{\bar{V}} \cap \tilde{\bar{V}}^{\bar{g}}$. Sei $\tilde{y} \in [\tilde{\bar{V}}, \bar{x}]$ mit $\tilde{y}^{\bar{h}} \in \tilde{B}$ für ein $\bar{h} \in \bar{M}$. Dann ist nach (5.6) $R/N \cong \Omega^{-}(4, q)$ oder $\bar{x} \in \bar{L}_{\tilde{y}} \leqslant \bar{R}$. Der zweite Fall ist aber nicht möglich. Also gilt $R/N \cong \Omega^{-}(4, q)$ oder $|[\tilde{\bar{V}}, \bar{x}]| \leqslant q$.

Sei nun zunächst $[\tilde{\bar{V}}, \bar{x}] \neq 1$. Dann können wir stets $\tilde{B}^{\bar{x}} \neq \tilde{B}$ annehmen. Also ist $\langle \tilde{B}, \tilde{B}^{\bar{x}} \rangle$ eine hyperbolische Ebene. Nach (5.2) ist dann $\tilde{W} = \widetilde{(W \cap Q_B)} \times \widetilde{(W \cap Q_B)}^{\bar{x}}$. Nach (5.2)(b) und (2.1) ist $|[W/V, \bar{x}]| \geqslant q^{2^{m-2}}$ bzw. $q^{2^{m-1}}$ falls $\tilde{\bar{V}}$ vom $(-)$-Typ ist. Andererseits ist $|[\tilde{Q}, \bar{x}]| = q^{2m}$. Da W nicht abelsch ist, ist für $R/N \cong \Omega^{-}(4, q)$ und $R/N \cong \Omega^{+}(6, q)$ stets $|W/V| \geqslant q^8$. Da nach

Annahme (b), (c), und (d) falsch sind, folgt nun $R/N \simeq \Omega^+(10, q)$. Es ist $\mathbf{C}_{R/N}(\bar{x}) \simeq Sp(8, q)$. Weiter operiert $\mathbf{C}_{R/N}(\bar{x})$ auf $\mathbf{C}_{W/V}(\bar{x})$ gemäß (2.1). Also ist $|\mathbf{C}_{W/V}(\bar{x})| \geqslant q^{16}$. Das widerspricht aber $|W/V| = q^{16}$.

Somit haben wir $[\tilde{V}, \bar{x}] = 1$ für alle $\bar{x} \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$ gezeigt. Somit ist $[\bar{R}, \bar{x}] \leqslant \bar{N}$. Nach (5.2)(a) ist $[\bar{N}, \tilde{W}] \leqslant \tilde{V}$. Also ist $[W/V, \bar{x}]$ eine R/N-invariante Gruppe. Dann ist $[W/V, \bar{x}] = 1$ oder $[W/V, \bar{x}]$ erfüllt die Voraussetzungen von (2.1). Im zweiten Fall erhalten wir (e). Das ist ein Widerspruch. Also ist $[\tilde{W}, \bar{x}] \leqslant \tilde{V}$ für alle $\bar{x} \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$.

Es ist $[\tilde{W}, \bar{x}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1 = [\tilde{W}, \bar{L}_B \cap \bar{N}, \bar{x}]$. Dann ist $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \bar{x}] \leqslant \mathbf{C}_{\bar{N}}(\tilde{W}) = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Somit gilt $[\bar{N}, \bar{x}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei nun $\bar{y} \in \bar{s}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{s})$ für ein $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$, so daß $\bar{u} = [\bar{x}, \bar{y}] \neq 1$ ist. Dann ist $[\bar{R}, \bar{u}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Weiter ist $[\tilde{W}, \bar{u}] = 1$ und $[\tilde{Q}, \bar{u}] \leqslant \tilde{V}$. Da $\bar{R}$ auf $[\tilde{Q}, \bar{u}]$ operiert, folgt $[\tilde{Q}, \bar{u}] = \tilde{V}$. Es ist $[\bar{u}, \bar{R}, \bar{R}] = 1 = [\bar{R}, \bar{u}, \bar{R}]$. Also ist $[\bar{R}', \bar{u}] = 1$. Mit (2.4) und (5.1) folgt nun $\bar{u} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Setze nun $\bar{E} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \mid [\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}, \mathbf{Z}(\bar{R})] = 1 \rangle$. Wir haben soeben $\bar{E}' \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$ gezeigt.

Sei nun $\bar{x} = \bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B \cap \mathbf{Z}(\bar{N})$. Wir können $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ annehmen. Also ist $\tilde{B} \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$. Es folgt $\tilde{V}^{\bar{g}} = [\tilde{Q}, \bar{x}] \leqslant \tilde{W}$. Sei nun $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \in \tilde{V}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \in \widetilde{Q_B \cap W}$, $\tilde{\beta} \in \widetilde{Q_A \cap W} - \tilde{V}$. Dann ist $[\tilde{\beta}, \bar{L}_A \cap \bar{N}] = \tilde{A}$. Da $[\bar{L}_A \cap \bar{N}, \bar{x}] = 1$ ist, ist $[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \bar{L}_A \cap \bar{N}] \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$. Zu jedem $\tilde{a} \in \tilde{A}^{\#}$ gibt es ein $\tilde{y} \in \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}$ und ein $\bar{u} \in \bar{L}_A \cap \bar{N}$, so daß $[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \bar{u}] = \tilde{y}\tilde{a}$ ist. Die Struktur von R liefert nun $\langle \tilde{B}, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B} \rangle = \langle \tilde{B}, [\tilde{y}\tilde{a}, \bar{L}_B] \rangle$. Wegen $\tilde{V} = \langle \tilde{B}, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}, \tilde{A} \rangle$ folgt nun $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Das widerspricht aber der Wahl von β. Somit ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B})$. Da $\tilde{B} \subseteq \tilde{V}^{\bar{g}}$ ist, ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \nsubseteq \widetilde{W \cap Q_B}$. Also gibt es ein $\tilde{a} \in \tilde{A}^{\#}$ und ein $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W \cap Q_B}$ mit $\tilde{a}\tilde{\alpha} \in \tilde{V}^{\bar{g}}$. Nun folgt wieder $\widetilde{V \cap Q_B} = \langle \tilde{B}, [\tilde{a}\tilde{\alpha}, \bar{L}_B] \rangle \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$. Somit ist $\widetilde{V \cap Q_B} = \tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{Q}_B$ und $|\tilde{V}^{\bar{g}} : C_{\tilde{V}^{\bar{g}}}(\bar{L}_B \cap \bar{N})| \leqslant q$. Die Struktur von $\bar{R}^{\bar{g}}$ liefert $[\tilde{V}^{\bar{g}}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Da $\mathbf{C}_{\widetilde{W \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$ ist, ist $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{W})) = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Somit haben wir $\bar{t}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \cap \mathbf{Z}(\bar{N}) \subseteq \mathbf{Z}(\bar{R})$, für alle $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$, gezeigt.

Sei nun $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \neq 1$. Es ist $\tilde{V} = [\tilde{Q}, \bar{t}]$ für alle $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$. Also ist $\tilde{V} = [\tilde{Q}, \bar{t}^{\bar{g}}] = \tilde{V}^{\bar{g}}$ für alle $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$. Insbesondere ist $\bar{g} \in \mathbf{N}(\tilde{W})$. Wir können $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ wählen. Dann ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{W})) = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$. Insbesondere ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine TI-Menge in $\bar{M}$.

Sei nun $\bar{T}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ mit $\bar{L}_B \leqslant \bar{T}$. Sei $1 \neq \bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{T}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})$ und $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{T})$. Dann ist $\bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{N}) = \mathbf{Z}(\bar{N}) \cap \bar{L}_B$. Also ist $\bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine TI-Menge ist, folgt nun $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$. Also ist $\bar{T}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$.

Setze $\bar{M}_1 = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$. Dann liefert [21, Korollar 2], daß $\bar{M}_1$ eine zentrale Erweiterung von $L_r(2^f)$, $U_3(2^f)$, $Sz(2^f)$, $G_2(2^f)$, $G_2(2)'$, ${}^3D_4(2^f)$, A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24} oder J_2 ist. Es folgt nun $\bar{M}_1 \cap \bar{R} \leqslant \bar{N}$. Insbesondere ist

$[\bar R^{(\infty)}, \bar M_1] = 1$. Nun liefert (4.5) $\bar M_1 \simeq L_2(q)$. Dann folgt $\bar M = \bar M_1 \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$. Das widerspricht aber $\mathbf{O}_2(\bar M) = 1$ und $|N| > q$.

(7.2) Lemma. *Es sei* (7.1)(a)—(d) *falsch. Sei* $\bar x = \bar t^{\bar g} \in \bar L_B - \mathbf{Z}(\bar R)$. *Dann sind alle Elemente aus* $\bar x\mathbf{Z}(\bar R)$ *unter* $\bar N$ *konjugiert.*

Beweis. Sei $|\bar N : \mathbf{C}_{\bar N}(\bar x)| < q$. Wir können $\bar g \in \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B)$ annehmen. Es ist $\tilde V^{\bar g} \subseteq \tilde W$. Weiter ist $\tilde B \subseteq \tilde V^{\bar g}$. Sei $\tilde\alpha\tilde\beta \in \tilde V^{\bar g}$, $\tilde\alpha \in \widetilde{W \cap Q_B}$, $\tilde\beta \in \widetilde{W \cap Q_A} - \tilde V$. Dann gibt es ein $\bar y \in \mathbf{C}_{\bar L_A \cap \bar N}(\bar x)$ mit $1 \neq \tilde a = [\tilde\beta, \bar y] \in \tilde A$. Dann ist $[\bar y, \tilde\alpha\tilde\beta] = \tilde u\tilde a$ mit $\tilde u \in \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}$. Da $\mathbf{C}_{\bar L_A \cap \bar N}(\bar x)$ in $\mathbf{N}(\tilde V^{\bar g})$ enthalten ist, folgt nun $\langle \tilde B, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}, \tilde u\tilde a\rangle = \langle \tilde B, [\tilde u\tilde a, \bar L_B], \tilde u\tilde a\rangle \leqslant \tilde V^{\bar g}$. Dann folgt aber $\tilde V = \tilde V^{\bar g}$. Das widerspricht der Wahl von $\tilde\beta$. Also ist $\tilde V^{\bar g} \subseteq \tilde V(\widetilde{W \cap Q_B})$. Dann folgt $\widetilde{V \cap Q_B} = \tilde V^{\bar g} \cap \tilde Q_B$. Es ist $\bar L_B \cap \bar N = \mathbf{C}_{\bar L_B}(\widetilde{V \cap Q_B}) = (\bar L_B \cap \bar N)^{\bar g}$. Das liefert nun $[\bar L_B \cap \bar N, \tilde V\tilde V^{\bar g}] = 1$. Da $\widetilde{V \cap Q_B} = \mathbf{C}_{\widetilde{W \cap Q_B}}(\bar L_B \cap \bar N)$ ist, folgt nun $\tilde V = \tilde V^{\bar g}$. Dann ist $\bar g \in \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{C}_{\bar L_B}(\tilde W)) = \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$. Das ist ein Widerspruch.

(7.3) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (7.2). *Dann gilt:*

(1) $\mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$.

(2) *Setze* $\bar F = \langle \bar t^{\bar M} \cap \bar L_B \mid \bar t \in \mathbf{Z}(\bar R)\rangle$. *Dann ist* $\bar F = \mathbf{Z}(\bar R)$ *oder alle Involutionen aus* $\bar F$ *sind konjugiert.*

(3) *Ist* $\bar L_B \cap \bar N$ *stark abgeschlossen in* $\bar L_B$, *so ist* $\mathbf{Z}(\bar R)$ *stark abgeschlossen in* $\bar L_B$. *Ist* $R/N \simeq \Omega^-(4, q)$, *so sind* $\bar L_B \cap \bar N$ *und* $\mathbf{Z}(\bar R)$ *stark abgeschlossen in* $\bar L_B$.

Beweis. (1) Sei $R/N \not\simeq \Omega^-(4, q)$. Nach (5.6) ist dann $\tilde B^{\bar R} = \tilde B^{\bar M} \cap \tilde V$. Also ist $\mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\tilde B)\bar R$. Dann ist $\mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B)\bar R$. Es ist $\mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B) \cap \mathbf{N}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B \cap \mathbf{C}(\tilde V)) = \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B \cap \bar N)$. Es ist weiter $\mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\tilde W)$. Also ist $\mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B \cap \bar N) \cap \mathbf{N}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B \cap \bar N) \cap \mathbf{N}(\tilde W) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B \cap \bar N \cap \mathbf{C}(\tilde W)) = \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$. Somit ist $\mathbf{N}(\tilde V) \leqslant \mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar R))$.

Sei nun $R/N \simeq \Omega^-(4, q) \simeq L_2(q^2)$. Weiter sei $\mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V) \not\leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$. Setze $\bar R_1 = \langle \bar L^{\bar g} \mid \bar L^{\bar g} \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\tilde V)\rangle$. Dann ist $\bar R_1 \neq \bar R$. Also operiert $\bar R_1$ transitiv auf den 1-dim. Unterräumen von $\tilde V$. Setze $\bar R_1/\mathbf{C}_{\bar R_1}(\tilde V) = \hat R_1$. Die Struktur von $GL_4(q)$ liefert, daß eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\hat R_1}(\hat L_B)$ und damit auch von $\hat R_1$ die Klasse $\leqslant 2$ hat. Da $\hat R_1/\mathbf{O}(\hat R_1)$ einfach ist und $|\hat L_B| \geqslant 16$ ist, folgt nun mit [12], daß $\hat R_1/\mathbf{O}(\hat R_1)$ zu $L_2(2^f)$, $L_3(2^f)$, $U_3(2^f)$, $Sz(2^f)$ oder $Sp_4(2^f)$ isomorph ist. Da $\hat R_1 \lesssim GL_4(q)$ und eine zu $L_2(q^2)$ isomorphe Untergruppe enthält, folgt nun, daß $\hat R_1/\mathbf{O}(\hat R_1)$ zu $L_2(q^2)$ oder $Sp_4(q)$ isomorph ist. Sei $\hat R_1/\mathbf{O}(\hat R_1) \simeq Sp_4(q)$. Dann ist $\mathbf{N}_{\hat R_1/\mathbf{O}(\hat R_1)}(\tilde B)$ eine Erweiterung einer Gruppe der Ordnung q^3 mit $L_2(q)$. Da $q > 2$ ist gibt es hierin keinen Normalteiler der Ordnung q^2. Aber $|\hat L_B| = q^2$. Dieser Widerspruch zeigt $\bar R_1 = \mathbf{C}_{\bar R_1}(\tilde V)\bar R$. Dann ist aber $\bar R_1$ nicht transitiv auf den 1-dim. Unterräumen von $\tilde V$. Dieser Widerspruch liefert (1).

(2) Sei $\bar{u} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ und $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\bar{u}^{\bar{g}} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $[\tilde{Q}, \bar{u}] = \tilde{V} = [\tilde{Q}, \bar{u}^{\bar{g}}] = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Also ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V})$. Nach (1) ist dann $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Sei nun $\bar{s} \in \bar{F} - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{u} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ und $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{s}^{\bar{h}} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\bar{h} \notin \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Also ist $\bar{u}^{\bar{h}} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach (7.2) ist dann $\bar{u}^{\bar{h}} \sim \bar{u}^{\bar{h}}\bar{s}^{\bar{h}} \sim \bar{u}\bar{s} \sim \bar{s}$ in $\bar{M}$. Also sind alle Elemente aus $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ in $\bar{M}$ konjugiert. Weiter haben wir, daß falls $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \bar{F}$ sind, $\bar{t}_1 \sim \bar{t}_1\bar{t}_2$ oder $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$ ist.

(3) Es ist $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B) \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Es ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) \subseteq \tilde{W}$. Es operiert $\bar{L}_B$ auf $\mathbf{C}_{\tilde{W}}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Somit liefert (5.2)(b), daß $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \tilde{V}$ ist. Somit ist $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ nach (1) in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ enthalten. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$.

Sei nun $R/N \cong \Omega^-(4, q)$. Sei $\bar{\alpha} \in \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist $[\bar{\alpha}, \tilde{W}] \leqslant \widetilde{V \cap Q_B}$. Also ist $|[\bar{\alpha}, \tilde{Q}]| \leqslant q^7$. Sei nun $\bar{\beta} \in \bar{L}_B - \bar{N}$. Da $|W/V| \geqslant q^8$ nach (5.2) und (2.1) ist, folgt nun $|[W/V, \bar{\beta}]| \geqslant q^4$. Da $|[\tilde{V}, \bar{\beta}]| = q^2$ ist, folgt nun $|[\tilde{Q}, \bar{\beta}]| \geqslant q^8$. Also ist $\bar{L}_B \cap \bar{N}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$.

(7.4) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (7.2). *Dann gilt*:

(1) *Ist* $\bar{F} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$, *so ist* $|\bar{F}| = q^3$ *und* $R/N \cong \Omega^+(6, q)$ *oder* $|\bar{F}| = q^5$ *und* $R/N \cong \Omega^+(8, q)$.

(2) *Sei* $\bar{h} \in \bar{R}$ *mit* $(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{h}} = \bar{L}_A \cap \bar{N}$. *Setze* $\bar{N}_0 = \bar{F}\bar{F}^{\bar{h}}$. *Dann ist* $\bar{N}_0 \lhd \bar{R}$. *Weiter ist* $\bar{R}$ *irreduzibel auf* $\bar{N}_0/\mathbf{Z}(\bar{R})$.

(3) *Sei* $\bar{s} = \bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$ *mit* $[W/V, \bar{s}] \neq 1$, $\bar{g} \in \bar{M}$. *Dann ist* $[\tilde{W}, \bar{s}] = \tilde{V}^{\bar{g}}$ *oder* $[\tilde{W}, \bar{s}](\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}})$ *ist eine Hyperebene von* $\tilde{V}^{\bar{g}}$.

Beweis. Setze $\bar{H} = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{F})$. Sei weiter $\bar{F} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei $\bar{x} \in \bar{H}$ mit $((\bar{L}_A \cap \bar{N}) \times \mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F}))^{\bar{x}} \cap (\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F}) > \mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})$. Dann gibt es ein $\bar{y}$ in diesem Durchschnitt mit $1 \neq [\bar{F}, \bar{y}] \in \mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{x}}$. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine *TI*-Menge ist, folgt dann $\bar{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar{R})) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N}) = \mathbf{N}_{\bar{M}}((\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{F}))$. Also ist $(\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})$ eine *TI*-Menge in $\bar{H}/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})$. Sei nun $\bar{x} \in \bar{H}$ mit $[(\bar{L}_A \cap \bar{N})^{\bar{x}}\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F}), (\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})] \leqslant \mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})$. Dann ist $(\bar{L}_A \cap \bar{N})^{\bar{x}} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Da $\mathbf{C}_{\bar{F}}(\bar{L}_A \cap \bar{N}) = \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist, folgt $\mathbf{C}_{\bar{F}}((\bar{L}_A \cap \bar{N})^{\bar{x}}) = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{x}}$. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{x}} \neq 1$. Das liefert $\bar{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Dann ist $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{H}}((\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F}))$. Nach (7.3)(2) operiert $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{F})$ transitiv auf $\bar{F}$. Also ist $\mathbf{O}_2(\bar{H}/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})) = 1$. Da $|(\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})| \geqslant 4$ ist, liefert nun [20 Korollar B], daß $\bar{H}_1 = \langle(\bar{L}_A \cap \bar{N})^{\bar{H}}\rangle\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})$ zu einer zentralen Erweiterung von A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24}, $Sz(2^s)$, $U_3(2^s)$ oder $L_r(2^s)$ isomorph ist. Ist $\bar{H}_1$ zu A_6, A_7, A_8 oder A_9 isomorph, so folgt $|(\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})| = 4$ bzw. 8. Also ist $|\bar{L}_A \cap \bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{L}_A \cap \bar{N}}(\bar{F})| = q$. Das liefert $|\bar{F}| = q^2$. Nach (5.1) widerspricht das aber der Operation von $\mathbf{N}(\bar{L}_B)$ auf $\bar{N}$. Ist $\bar{H}_1 \cong M_{22}$, M_{23} oder M_{24}, so folgt $|\bar{F}| \leqslant 2^8$. Aber keine dieser Gruppen besitzt solch kleine Darstellungen.

Sei nun $\bar{H}_1 \cong Sz(2^s)$ oder $U_3(2^s)$. Dann ist $|(\bar{L}_A \cap \bar{N})\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})/\mathbf{C}_{\bar{H}}(\bar{F})| = 2^s$. Also ist $|\bar{F}| \leqslant q2^s$, wobei $q \leqslant 2^s$ ist. Aber beide Gruppen besitzen keine solche Darstellungen.

Also ist $\bar{H}_1 \cong L_r(2^s)$. Dann folgt $2^s = q$ und $|\bar{F}| = q^r$. Die Struktur von $\mathbf{N}_{\bar{R}}(\bar{F})$ liefert $r \geqslant 3$ bzw. $r \geqslant 5$. Sei $r > 3$ bzw. $r > 5$, so folgt $[\bar{R}, \mathbf{N}_{\bar{H}_1}(\mathbf{Z}(\bar{R}))] \leqslant \bar{N}$. Da $\mathbf{N}_{\bar{H}_1}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ transitiv auf $(\bar{F}/\mathbf{Z}(\bar{R}))^{\#}$ operiert, ist das ein Widerspruch. Somit haben wir (1).

(2) folgt direkt aus (1).

(3) Nach (7.1)(e) ist $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}$. Also ist $[W/V, \bar{s}]$ ein Modul gemäß (2.1). Also ist $|[W/V, \bar{s}]| \geqslant q^4$ für $R/N \cong \Omega^-(4, q)$ oder $\Omega^+(6, q)$ bzw. $|[W/V, \bar{s}]| \geqslant q^8$ für $R/N \cong \Omega^+(8, q)$. Dann folgt aber $[\tilde{W}, \bar{s}] = \tilde{V}^{\bar{g}}$ oder $R/N \cong \Omega^+(6, q)$ und $|[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{s}]| = q^4$.

Sei $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} \neq 1$. Dann ist $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| \geqslant q$. Also gilt die Behauptung. Sei nun $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$. Da $\tilde{V}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{W}$ ist, folgt $|W : \mathbf{C}_W(VV^{\bar{g}})| = q^6$. Also ist $Q = W\mathbf{C}_Q(V^g)$. Dann ist aber $[\tilde{W}, \bar{s}] = [\tilde{Q}, \bar{s}] = \tilde{V}^{\bar{g}}$.

(7.5) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (7.2). *Sei weiter* $R/N \ncong \Omega^-(4, q)$. *Sei* $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ *und* $\bar{s} = \bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$, $\bar{g} \in \bar{M}$, *mit* $[\tilde{W}, \bar{s}] \nsubseteq \tilde{V}$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $\bar{u} \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$ *mit* $[\bar{u}, [\tilde{W}, \bar{s}]] \leqslant [\tilde{W}, \bar{s}]$, *so ist* $\bar{u} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})$.

(2) $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}_0$.

Beweis. (1) Nach (7.1)(e) ist $[\bar{u}, \tilde{V}] = 1$. Nach (7.4)(3) normalisiert $\bar{u}$ eine Hyperebene $\tilde{H}$ in $\tilde{V}^{\bar{g}}$. Da $R/N \ncong \Omega^-(4, q)$ ist, enthält $\tilde{H}$ ein hyperbolisches Paar $\tilde{C}, \tilde{D}$. Sei $\tilde{E} = \tilde{C}^{\bar{u}}$ und $\tilde{I} = \tilde{D}^{\bar{u}}$. Dann ist nach (2.1), $\bar{R}_s = \langle \bar{L}_E, \bar{L}_I \rangle = \langle \bar{L}_D, \bar{L}_C \rangle^{\bar{u}} = (\bar{R}_s)^{\bar{u}}$. Beachte, daß nach (5.6) $\tilde{E}, \tilde{I}$ ein hyperbolisches Paar in $\tilde{V}^{\bar{g}}$ ist. Also ist $\bar{u} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})$.

(2) Sei zunächst $R/N \cong \Omega^+(8, q)$. Es ist $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}$. Also ist $\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}}$ $\bar{R}$-invariant. Das liefert $|\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}}| = q^{16}$ und $\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}} \subseteq (\widetilde{W \cap Q_A})(\widetilde{W \cap Q_B})$. Also ist $|\tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B})| \geqslant q^4$ und $|\widetilde{W \cap Q_B} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| \geqslant q^3$. Dann gibt es ein $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W \cap Q_B} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}$ in $\bar{M}$. Weiter ist $\bar{s} \in \bar{L}_\alpha$. Nach [25, (2.18)] ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle / \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle) \cong L_2(q)$. Setze $\bar{Z} = \bar{L}_B \cap \bar{L}_\alpha$. Es ist $[\bar{F}, \bar{L}_\alpha \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle)] \leqslant \bar{F} \cap \bar{Z}$. Sei zunächst $\bar{F} \cap \bar{Z} = 1$, so folgt $[\bar{s}, \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle)] = 1$. Dann ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{s})| \leqslant q$. Dann ist $|(\bar{L}_B)^{\bar{h}}\bar{N}_0/\bar{N}_0 : \mathbf{C}_{(\bar{L}_B)^{\bar{h}}\bar{N}_0/\bar{N}_0}(\bar{s})| \leqslant q$ für alle $\bar{h} \in \bar{R}$. Da $\bar{R}$ von $\bar{L}_B$ und $(\bar{L}_B)^{\bar{h}}$ für geeignetes $\bar{h} \in \bar{R}$ erzeugt wird, folgt nun $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}_0$.

Sei nun $\bar{F} \cap \bar{Z} \neq 1$. Ist $1 \neq \bar{f} \in \bar{F} \cap \bar{Z}$, so ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle$ in $\bar{R}_f$ enthalten. Sei $\bar{R}^{\bar{m}} = \bar{R}_f$. Dann ist nach (7.4)(2) $\bar{s} \in (\bar{N}_0)^{\bar{m}}$. Also ist $[\bar{s}, \bar{L}_B] \leqslant \bar{F}$. Dann folgt aber $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}_0$.

Sei jetzt $R/N \cong \Omega^+(6, q)$. Ist $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q^2$, so ist $|\tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B}) \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q^4$. Nun folgt die Behauptung wie oben. Nach (7.4)(3) können wir somit $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q$ annehmen. Gibt es ein $\tilde{v} \in \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{v} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\bar{M}$, so ist $\bar{s} \in \bar{L}_v$ nach (5.6). Also ist $\bar{s} \in \bar{N}_0$. Das widerspricht $[\tilde{W}, \bar{s}] \nsubseteq \tilde{V}$. Also gibt es ein solches $\tilde{v}$ nicht.

Da $\tilde{V}^{\tilde{g}} \subseteq \tilde{W}$ ist, folgt nun $| W : \mathbf{C}_W(V^{g})| = q^5$. Da $V \cap V^{g} \subseteq \mathbf{Z}(W)$ ist, folgt nach Definition des Skalarproduktes auf $\tilde{V}^{\tilde{g}}$, $((\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(s\langle y, \mathbf{Z}(Q)\rangle))$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{V}^{\tilde{g}}$, daß $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}} \subseteq [\tilde{W}, \tilde{s}]^{\perp}$. Also ist $[\tilde{W}, \tilde{s}]^{\perp} = \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$. Weiter können wir $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}} \subseteq \widetilde{Q_A \cap Q_B}$ annehmen. Es folgt $| \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B}) \cap [\tilde{W}, \tilde{s}]| = q^3$. Gibt es in $\tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B}) \cap [\tilde{W}, \tilde{s}]$ eine Untergruppe der Ordnung $2q$, die nur aus Elementen besteht, die zu $\tilde{b} \in \tilde{B}$ in $\overline{M}$ konjugiert sind, so erhalten wir wie oben die Behauptung. Also können wir $\tilde{V}_1 = \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B}) \cap [\tilde{W}, \tilde{s}] = (\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}) \oplus \langle \tilde{C}, \tilde{D}\rangle$ annehmen, wobei $\tilde{C}, \tilde{D} \in \tilde{B}^{\overline{M}} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$ ein hyperbolisches Paar ist. Es ist $| \tilde{V}_1 \cap \widetilde{W \cap Q_B} | \geqslant q^2$. Da $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$ in $\tilde{V}_1 \cap \widetilde{W \cap Q_B}$ enthalten ist, gibt es wieder ein $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W \cap Q_B} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\overline{M}$. Nun folgt wie oben die Behauptung.

(7.6) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (7.2). *Dann ist* $R/N \cong \Omega^{-}(4, q) \cong L_2(q^2)$.

Beweis. Angenommen falsch. Sei $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$. Seien weiter $\bar{u}, \bar{v} \in (\mathbf{C}_{\overline{M}}(\bar{t}) \backslash \overline{N}_0)$ mit $1 \neq \bar{y} = [\bar{u}, \bar{v}]$ und $\bar{u}^{\bar{g}} = \bar{t}_1$, $\bar{v} \sim \bar{t}_2$, $\bar{t}_i \in \mathbf{Z}(\bar{R})$.

Sei zunächst $[\tilde{W}, \bar{u}] \leqslant \tilde{V}$. Sei $\tilde{x} \in \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$ mit $\tilde{x} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\overline{M}$. Nach (5.6) ist $\tilde{x} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}$ in $\bar{R}$. Also ist $\bar{u} \in \bar{L}_x \leqslant \bar{R}$. Das widerspricht aber $\bar{u} \notin \overline{N}_0$. Somit ist $| \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}} | \leqslant q^2$. Da $\tilde{V}^{\tilde{g}} \subseteq \tilde{W}$ ist, folgt nun $| W : \mathbf{C}_W(V^{g})| \geqslant q^4$. Also ist $[\tilde{W}, \bar{u}] \geqslant q^4$. Aber $[\tilde{W}, \bar{u}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\tilde{g}}$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $[\tilde{W}, \bar{u}] \nleqslant \tilde{V} \ngeqslant [\tilde{W}, \bar{v}]$.

Nach (7.5) und (7.6) ist $[\bar{R}, \bar{u}, \bar{v}] \leqslant [\overline{N}_0, \bar{v}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Genauso folgt $[\bar{v}, \bar{R}, \bar{u}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach dem 3-Untergruppenlemma ist dann $[\bar{R}, \bar{y}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $[\bar{R}, \bar{y}] = 1$.

Sei nun $[\tilde{W}, \bar{y}] \neq 1$. Da $\bar{R}$ auf $[\tilde{W}, \bar{y}]$ operiert, folgt mit (3.5) $\tilde{V} \subseteq [\tilde{W}, \bar{y}]$. Also ist $\tilde{V} \subseteq [\tilde{W}, \bar{u}][\tilde{W}, \bar{v}]$. Es sind $\tilde{V}[\tilde{W}, \bar{u}]$ und $\tilde{V}[\tilde{W}, \bar{v}]$ $\bar{R}$-invariant. Dann folgt $\tilde{V}[\tilde{W}, \bar{u}] = \tilde{V}[\tilde{W}, \bar{v}]$. Also ist $[\bar{v}, [\tilde{W}, \bar{u}]] = 1 = [\bar{u}, [\tilde{W}, \bar{v}]]$. Nach dem 3-Untergruppenlemma ist $[\tilde{W}, \bar{y}] = 1$. Das ist ein Widerspruch.

Wir haben somit $[\tilde{Q}, \bar{y}] = \tilde{V}$ gezeigt. Nach (2.4) ist dann $\bar{y} \in Z(\bar{R})$. Setze nun $\overline{W} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \mid \bar{g} \in \overline{M}, [\mathbf{Z}(\bar{R}), \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}] = 1\rangle$. Wir haben $\overline{W}' \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$ gezeigt. Es enthält $\mathbf{N}_{\overline{M}}(\bar{L}_B)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\overline{M}$. Da $\bar{F}$ in $\mathbf{N}_{\overline{M}}(\bar{L}_B)$ normal ist, enthält auch $\mathbf{N}_{\overline{M}}(\bar{F})$ eine Sylow 2-Untergruppe. Nach (7.3)(2) ist $\bar{F} = \mathbf{Z}(\bar{R})$ oder $\mathbf{N}_{\overline{M}}(\bar{F})$ ist transitiv auf $\bar{F}^{\#}$. Also enthält in beiden Fällen $\mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\overline{M}$. Setze nun $\bar{C} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\overline{M}}\rangle$. Nach [21, Korollar 2] ist $\bar{C}$ eine zentrale Erweiterung von $A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, L_r(2^s), U_3(2^s), Sz(2^s), G_2(2^s), U_3(3)$ oder ${}^3D_4(2^s)$. Nach (4.5) ist $\bar{R}^{(\infty)} \leqslant \bar{C}$ oder $\bar{C} \cong L_2(q)$. Das liefert nun $\bar{C} \cong L_2(q)$. Dann ist aber $\overline{M} = \bar{C}\mathbf{N}_{\overline{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Das ist ein Widerspruch.

(7.7) Lemma. *Es gilt eine der Aussagen von* (7.1) (a)—(d).

Beweis. Angenommen falsch. Dann ist nach (7.6) $R/N \cong L_2(q^2)$. Nach (7.3)(3) sind $\bar{L}_B \cap \bar{N}$ und $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Sei $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$, $\bar{g} \in \bar{M}$ und $\bar{s} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^g$. Setze $\bar{L}_1 = (\bar{L}_B)^{\bar{g}}$ und $\mathrm{R}_1 = (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$.

Wir zeigen zunächst:

(1) $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$. Nach (7.1)(e) ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{W}$. Weiter ist $|[W/V, \bar{s}]| = q^4$ oder $[\tilde{W}, \bar{s}] \leqslant \tilde{V}$. Im ersten Fall ist $\tilde{V}^{\bar{g}} = [\tilde{W}, \bar{s}]$ und somit $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$. Sei also $\tilde{V} \geqslant [\tilde{W}, \bar{s}]$.

Sei zunächst $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q$. (Beachte, daß es nach [7, Satz 4] ein $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$, $o(\rho) = q - 1$, mit $[\langle \bar{s}, \bar{t} \rangle, \rho] \in \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$ gibt. Weiter ist ρ fixpunktfrei auf $\tilde{Q}^{\#}$. Somit operiert ρ auf $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Insbesondere ist $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}|$ eine q-Potenz.) Dann ist $|W : \mathbf{C}_W(V^{\bar{g}})| = q^3$. Also ist $|[\tilde{W}, \bar{s}]| = q^3$. Aber $[\tilde{W}, \bar{s}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q^2$. Sei $\tilde{\alpha} \in \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b}^{\bar{g}} \in \tilde{B}^{\bar{g}}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$. Sei $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\bar{R}$. Dann ist $\langle \bar{t}, \bar{s} \rangle \leqslant \bar{L}_\alpha$. Das widerspricht aber $\bar{s} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $\tilde{\alpha} \not\sim \tilde{b} \in \tilde{B}$ in $\bar{R}$. Bilde $\perp$ bezüglich des Skalarproduktes auf $\tilde{V}$. Dann enthält $\tilde{\alpha}^{\perp}$ ein hyperbolisches Paar $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \tilde{B}^{\bar{R}}$. Wir können $\tilde{X} = \tilde{B}$, $\tilde{Y} = \tilde{A}$ annehmen. Dann ist $\langle A, B \rangle \leqslant Q_\alpha$. Nach [25, (2.18)] ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle / \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle) \cong L_2(q)$. Dann ist $[\bar{L}_\alpha \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle), \mathbf{Z}(\bar{R})] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{L}_\alpha$. Ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{L}_\alpha \neq 1$. So ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) \subseteq \bar{L}_\alpha$. Dann ist aber $\langle \mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{s} \rangle \leqslant \bar{L}_\alpha$. Das widerspricht $\bar{s} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $[\bar{L}_\alpha \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle), \mathbf{Z}(\bar{R})] = 1$. Das liefert nun $[\bar{s}, \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle)] = 1$. Also ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{s})| \leqslant q$. Genauso folgt $|\bar{L}_A : \mathbf{C}_{\bar{L}_A}(\bar{s})| \leqslant q$. Das liefert nun $[\bar{N}, \bar{s}] = 1$ und $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{s})/\bar{N} \cong L_2(q)$. Es operiert $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{s})$ auf $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Sei $[\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{s}), \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}] = 1$. Dann enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ kein $\tilde{v}$ mit $\tilde{v} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\bar{R}$. Das widerspricht aber der Operation von R/N auf $\tilde{V}$. Also ist $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ der natürliche $L_2(q)$-Modul. (Beachte, daß die Existenz des Elementes $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$ liefert, daß $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ ein Modul über F_q ist.) Somit sind nun alle Elemente aus $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ zu Involutionen aus $\tilde{B}^{\bar{g}}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$ konjugiert. Da $\tilde{V}^{\bar{g}}$ vom $(-)$-Typ ist, ist das nicht möglich.

Also enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ kein $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b}^{\bar{g}} \in (\tilde{B}^{\bar{g}})^{\#}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$. Sei $(\, , \,)$ das Skalarprodukt auf $\tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann ist $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 0 \Leftrightarrow [v_1, c] = 1$ für alle $c \in Q$ mit $[\tilde{c}, \bar{s}] = \tilde{v}_2$. Da $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = [\tilde{W}, \bar{s}]$ ist, ist $c \in W^g W$. Nun ist aber $[V \cap V^{\bar{g}}, WW^g] = 1$. Also ist $(\, , \,)_{\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}} = 0$. Die Struktur von $\tilde{V}^{\bar{g}}$ als orthogonaler Raum liefert nun, daß es stets ein $\tilde{\alpha}$ gibt, so daß $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b}^{\bar{g}} \in (\tilde{B}^{\bar{g}})^{\#}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$.

Sei nun zuletzt $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q^3$. Enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ ein hyperbolisches Paar $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ mit $\tilde{X} \sim \tilde{Y} \sim \tilde{B}^{\bar{g}}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$. Dann folgt wie oben $[\bar{N}, \bar{s}] = 1$ und $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{s})/\bar{N} \cong L_2(q)$. Es folgt nun, daß $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ ein $1 \neq \tilde{\alpha}$ enthält mit $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}^{\#}$ in $\bar{R}$ und $\tilde{\alpha} \sim \tilde{b}^{\bar{g}} \in \tilde{B}^{\bar{g}}$ in $\bar{R}^{\bar{g}}$. Das ist aber ein Widerspruch. Also enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ kein solches hyperbolisches Paar. Dann enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ aber ein hyperbolisches Paar $\tilde{I}$, $\tilde{J}$ in $\tilde{V}$ mit $\tilde{I} \sim \tilde{J} \sim \tilde{B}$ in $\bar{R}$. Vertausche nun die Rollen von $\tilde{V}$ und $\tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann erhalten wir wieder einen Widerspruch. Damit ist (1) bewiesen.

Wir zeigen nun:

(2) $\bar{L}_B \cap \bar{L}_1 = 1$. Angenommen falsch. Sei $\bar{r} \in \bar{L}_B \cap \bar{L}_1$, $\bar{r} \neq 1$. Setze

$\bar{Y} = \langle \bar{L}_B, \bar{L}_1 \rangle$. Nach (5.12) ist dann $\bar{Y} = \bar{R}_\tau$ oder $\bar{Y}/\mathbf{O}_2(\bar{Y}) \cong L_2(q)$. Ist $\bar{Y} = \bar{R}_\tau$, so liefert (5.1), da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ ist, daß $R_\tau/N_\tau \cong \Omega^+(4, q)$ oder $L_2(q)$ ist. Somit gilt stets $\bar{Y}/\mathbf{O}_2(\bar{Y}) \cong L_2(q)$ oder $\Omega^+(4, q)$. In beiden Fällen folgt $|\bar{L}_B : \mathbf{N}_{\bar{L}_B}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})| \leqslant q$. Also ist auch $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})| \leqslant q$. Dann ist $[\mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}), \tilde{V}^{\bar{g}}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$ nach (1). Aber $|\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{Q}_B| \geqslant q^5$. Das widerspricht der Struktur von Q_B. Somit ist (2) bewiesen.

Sei $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})$. Dann ist $\bar{x} \in \mathbf{C}(\tilde{V}^{\bar{g}})$ nach (1). Also ist $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_1)$. Nach (7.3)(3) ist $\mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\bar{L}_1) = \mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\bar{B}_1) = \mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}})$. Genauso folgt $\mathbf{N}_{\bar{B}_1}(Z(\bar{R})) = \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\bar{L}_B)$. Setze nun $\bar{X} = \langle \bar{L}_B \cap \bar{N}, \bar{B}_1 \rangle, \bar{F} = \mathbf{N}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\bar{B}_1)$ und $\bar{F}_1 = \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Wähle $\bar{x} \in \bar{F}, \bar{y} \in \bar{B}_1$. Dann ist $[\bar{x}, \bar{y}] \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{x})$. Es ist $\bar{x} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}})$ und $\bar{y} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}})$. Dann ist $[\bar{x}, \bar{y}] \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}})$. Also ist $\bar{t}^{[\bar{x},\bar{y}]} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{V})$. Nach (7.3) ist dann $\bar{t}^{[\bar{x},\bar{y}]} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Es ist $\bar{x} \in \bar{L}_B \cap (\bar{L}_B)^{[\bar{x},\bar{y}]}$. Nach (2) ist dann $[\bar{x}, \bar{y}] \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Also ist $[\bar{F}, \bar{B}_1] \leqslant \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\bar{L}_B) = \bar{F}_1$. Genauso folgt $[\bar{F}_1, \bar{L}_B \cap \bar{N}] \leqslant \bar{F}$. Also ist $\bar{F}_1\bar{F} \trianglelefteq \bar{X}$.

Da $\bar{F} \leqslant \mathbf{C}(\tilde{V}^{\bar{g}})$, folgt $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \bar{F}| > q$. Sei $\bar{h} \in \bar{X}$ mit $1 \neq (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{h}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} \neq \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist $\langle \mathbf{Z}(\bar{R}), \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{h}} \rangle \leqslant \bar{F}\bar{F}_1$. Da $[\bar{F}, \bar{F}_1] \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{N} \cap \bar{B}_1 \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{L}_1 = 1$ nach (2) ist, folgt $[\mathbf{Z}(\bar{R})\, \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{h}}] = 1$. Wegen $\bar{L}_B \cap (\bar{L}_B)^{\bar{h}} \neq 1$ folgt nun mit (2) $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{h}}$. Es ist o. B. d. A. $\bar{h} \in \bar{B}_1$. Also ist $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\mathbf{Z}(\bar{R})) = \mathbf{N}_{\bar{B}_1}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\bar{L}_B \cap \bar{N}$ eine *TI*-Menge in $\bar{X}$. Nach [21, (2.4)] ist dann $\bar{X}/\bar{F}\bar{F}_1 \cong L_2(r)$ oder $Sz(r)$ mit $r = |\bar{L}_B \cap \bar{N} : \bar{F}|$. Nach [21, (2.4)] ist dann aber $\mathbf{Z}(\bar{R})$ nich stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$, da $r > q$ ist. Somit ist das Lemma bewiesen.

(7.8) Satz. *Es gilt eine der folgenden Aussagen.*

(1) $R/N \cong \Omega^\pm(6, q)$, $n = 10$ *und* $|\bar{N}| = q^9$.

(2) $R/B \cong \Omega^\pm(8, q)$, $n = 16$ *und* $|\bar{N}| = q^{17}$.

(3) $R/N \cong \Omega^+(8, q)$, $n = 12$ *und* $|\bar{N}| = q^9$.

(4) $R/N \cong \Omega^+(10, q)$, $n = 18$ *und* $|\bar{N}| = q^{17}$.

(5) $R/N \cong \Omega^+(12, q)$, $n = 28$ *und* $|\bar{N}| = q^{33}$.

Beweis. Nach (7.7) und (7.1) gilt (1) oder (3) oder es gibt ein $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^\#$ mit $\bar{s}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \not\subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Sei also $\bar{u} \in \bar{s}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B - \bar{N}$. Dann ist $\bar{u}$ vom Typ a_2 oder c_2 auf $\tilde{V}$. Ist $\bar{u}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$, so gibt es ein $\bar{v} \sim \bar{u}$ in $\bar{R}$, so daß $\bar{v}\bar{u}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$ ist. Sei $|[W/V, \bar{u}]| = q^x$. Dann liefern (5.2) und (2.1), daß $|W/V| \leqslant q^{4x}$ ist. Es ist $|[\tilde{V}, \bar{u}]| = q^2$. Schließlich ist $|[\tilde{Q}, \bar{u}]| = q^{2m} = q^{x+4}$. Mit (2.1) folgt nun $2m \geqslant y2^{m-2} + 4$ mit $y \geqslant 1$, falls $R/N \cong \Omega^-(2m, q)$ ist. Das liefert $y = 1$ und $m = 3$ oder 4. Also haben wir (1) oder (2).

Ist $R/N \cong \Omega^-(2m, q)$, so liefert (2.1) $2m \geqslant y2^{m-3} + 4$. Das liefert nun die restlichen Möglichkeiten.

(7.9) Lemma. *Es ist* $\bar{N}/\mathbf{Z}(\bar{R})$ *ein irreduzibler* R/N*-Modul oder* $R/N \cong \Omega^+(6, q)$ *oder* $R/N \cong \Omega^+(8, q)$ *mit* $n = 16$.

Beweis. Folgt direkt aus (7.8), (5.1) und (2.1).

(7.10) LEMMA. *Es ist* $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$.

Beweis. Sei $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B = \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Nach (7.1) ist dann $R/N \simeq \Omega^{\pm}(6, q)$ oder $\Omega^{+}(8, q)$. Da $\tilde{V} = [\tilde{Q}, \bar{t}]$ für alle $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ ist und $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t}) = \widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}$ ist, folgt mit (2.4), daß $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine *TI*-Menge in $\bar{M}$ ist. Sei nun $\bar{X} = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$, $\bar{g} \in \bar{M}$, mit $[\mathbf{Z}(R), \bar{X}] = 1$. Es ist $[\bar{X}, \bar{R}] \leqslant \bar{R}$. Sei $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$ mit $[\tilde{V}, \bar{x}] \neq 1$. Gibt es ein $\tilde{v} \in [\tilde{V}, \bar{x}]^{\#}$ mit $\tilde{v} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}$ in $\bar{R}$, so ist $\bar{x} \in \bar{L}_v \subseteq \bar{R}$ nach (5.6). Dann ist aber $\bar{x} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|[\tilde{V}, \bar{x}]| = q$. Das liefert nun $|\bar{X} : \mathbf{C}_{\bar{X}}(\tilde{V})| \leqslant 2$. Da $\bar{X}$ eine *TI*-Menge in $\bar{R}\bar{X}$ ist, folgt nun $[\bar{X}, \tilde{V}] = 1$. Also ist $[\bar{R}, \bar{X}] \leqslant \bar{N}$.

Sei nun $\bar{x} \in \bar{X}$ mit $[W/V, \bar{x}] \neq 1$. Dann ist $[W/V, \bar{x}]$ ein Modul gemäß (2.1). Also ist R/N nicht irreduzibel auf W/V. Das liefert $R/N \simeq \Omega^{+}(6, q)$. Weiter ist $W/V = W_1 \oplus W_2$, wobei W_1 der natürliche $L_4(q)$-Modul und W_2 sein dualer Modul ist. Also folgt auch in diesem Fall ein Widerspruch. Das liefert nun $[\tilde{W}, \bar{X}] \leqslant \tilde{V}$. Setze nun $\bar{E} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))\rangle$. Dann folgt wie in (7.1), $\bar{E}' \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Setze nun $\bar{M}_1 = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}}\rangle$. Nach [21, Korollar 2] ist $\bar{M}_1$ zu A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, $L_r(2^s)$, $G_2(2^s)$, $U_3(3)$, $Sz(2^s)$, $U_3(2^s)$ oder ${}^3D_4(2^s)$ isomorph. Nach (4.5) ist $\bar{R}^{(\infty)} \leqslant \bar{M}_1$ oder $\bar{M}_1 \simeq L_2(q)$. Das liefert nun $\bar{M}_1 \simeq L_2(q)$. Nun folgt aber $\bar{M} = \bar{M}_1 \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Da $|\bar{N}| > q$ und $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$ ist, ist das ein Widerspruch.

(7.11) LEMMA. *Es ist* $\bar{N}' \neq 1$ *oder* $R/N \simeq \Omega^{+}(8, q)$ *und* $n = 12$.

Beweis. Sei $\bar{N}' = 1$. Sei weiter zunächst $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = \{\mathbf{Z}(R)\}$. Sei $\bar{g} \in M$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R}) \neq \bar{X} = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \subseteq \bar{L}_B$. Ein solches $\bar{X}$ gibt es nach (7.10). Sei $\bar{Y} = [\bar{N}, \bar{x}]$ für ein $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann ist $\bar{Y}^{\bar{g}^{-1}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = 1$. Ist x vom Typ c_2, so folgt $|\tilde{V}| = |[\tilde{Q}, \bar{x}]| = q^4(|W/V|)^{1/2}$. Eine leichte Inspektion der einzelnen Möglichkeiten liefert nun einen Widerspruch. Also ist stets $\bar{x}$ vom Typ a_2. Dann sind alle Elemente in $\bar{Y}^{\bar{g}^{-1}}\bar{N}/\bar{N}$ vom Typ a_2. Da $|\bar{Y}| \geqslant (|(\bar{L}_B \cap \bar{N})/\mathbf{Z}(\bar{R})|)^{1/2}$ ist, folgt nun $R/N \simeq \Omega^{+}(6, q)$, $\Omega^{+}(10, q)$ oder $\Omega^{+}(8, q)$ mit $n = 12$. Weiter folgt $\bar{Y} = [\bar{N}, \bar{x}]$ für alle $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann folgt aber, daß es in $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine Hyperebene $\bar{Z}$ gibt, so daß $\bar{Z}\bar{x}$ nur zu $\bar{x}$ konjugierte Involutionen enthält. Das liefert $(\bar{Z} \times \bar{Y})^{\bar{g}^{-1}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = 1$. Dann ist aber $R/N \simeq \Omega^{+}(8, q)$.

Somit ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Sei nun $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ und $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B \cap \bar{N}$, $\bar{t}^{\bar{g}} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\bar{N} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}^{\bar{g}}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V}^{\bar{g}})$. Da $[\tilde{V}, \bar{R}^{\bar{g}}] = 1$ ist, folgt $\tilde{V}^{\bar{g}} = [\tilde{Q}, \bar{t}^{\bar{g}}] \leqslant \tilde{W}$. Somit ist $[\tilde{V}^{\bar{g}}, \bar{N}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Wie in (7.1) erhält man nun $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann ist aber $[\bar{t}^{\bar{g}}, \tilde{W}] = 1$. Das liefert $\bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Das ist ein Widerspruch.

(7.12) LEMMA. *Sei* $\bar{H} = \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))$. *Dann ist* $\mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))) = \mathbf{O}_2(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$.

Beweis. Sei $\bar{x} \in \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$ mit $[\bar{N}, \bar{x}] = 1$, $o(\bar{x})$ ungerade. Dann ist $[\bar{R}, \bar{x}] = 1$ Nach (3.5) ist dann $\bar{x}$ fixpunktfrei auf $\tilde{Q}^{\#}$. Also ist $o(\bar{x}) \mid q - 1$. Sei nun $y \in \mathrm{Aut}(Q)$, $o(y) = o(\bar{x})$, $[y, \bar{R}] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$, $[\bar{x}, y] \in \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}(Q)}(y) = 1$. Ein solches Element gibt es nach [7, Satz 4]. Dann gibt es aber ein $\bar{u} \in \langle \bar{x}, y \rangle$ mit $\tilde{Q} = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{u}) \times [\tilde{Q}, \bar{u}]$ und $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{u}) \neq 1 \neq [\tilde{Q}, \bar{u}]$. Da $\bar{L}_B$ auf $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{u})$ und $[\tilde{Q}, \bar{u}]$ operiert, erhalten wir nun einen Widerspruch zu (3.5). Also ist $\mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$ eine 2-Gruppe.

(7.13) Lemma. *Ist $R/N \not\simeq \Omega^+(8, q)$, so ist* $\mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))) = \bar{N}$.

Beweis. Sei $\bar{x} \in \mathbf{O}_2(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$. Dann ist $[\bar{x}, \bar{R}] \leqslant \bar{N}$. Also ist $[\bar{x}, \tilde{V}] = 1$. Da $[\bar{x}, W/V]$ ein R/N-Modul gemäß (2.1) ist und $R/N \not\simeq \Omega^+(8, q)$ ist, folgt nun $[W/V, \bar{x}] = 1$. Sei nun $\bar{x} \notin \bar{N}$. Dann liefert die Operation von $\bar{R}$ auf $\bar{N}$, daß es stets ein $\bar{y} \in \bar{R}$, $o(\bar{y})$ ungerade, gibt, so daß $\mathbf{Z}(\bar{R}) = C_{\bar{H}}(\bar{y})$, $o(y) \nmid q - 1$ ist. Wir können $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$ annehmen. Also ist $[\bar{N}, \bar{x}] = [\mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{x}]$. Sei $[\mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{x}] = 1$. Dann ist $[\bar{R}, \bar{x}] = 1$. Also operiert $\bar{R}$ auf $[\tilde{W}, \bar{x}]$. Das liefert $[\tilde{W}, \bar{x}] = 1$ oder $[\tilde{W}, \bar{x}] = \tilde{V}$. Nach (7.8) ist dann $[\tilde{W}, \bar{x}] = 1$. Nun folgt $[\tilde{Q}, \bar{x}] = \tilde{V}$. Das widerspricht aber (2.4).

Sei nun $[\bar{x}, \mathbf{Z}(\bar{R})] \neq 1$. Sei $\bar{T}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R}) \leqslant \bar{T}$. Da $R/N \not\simeq \Omega^+(8, q)$ ist, folgt $\mathbf{Z}(\bar{T}) < \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach [25, (2.18)] gibt es ein $\bar{u} \in \bar{M} - \bar{H}$, $o(\bar{u}) = q - 1$, wobei $\bar{u}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B$ operiert. Dann können wir $\bar{u}$ so wählen, daß $\bar{u}$ auf $\bar{T}$ operiert. Das widerspricht aber $\mathbf{Z}(\bar{R}) > \mathbf{Z}(\bar{T})$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(7.14) Lemma. *Sei $R/N \simeq \Omega^+(8, q)$. Dann ist $n = 16$.*

Beweis. Nach [25, (2.18)] gibt es ein $\bar{u} \in \bar{M} - \bar{H}$, $o(\bar{u}) = q - 1$ wobei $\bar{u}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B$ operiert. Dann können wir annehmen, daß $\bar{u}$ auf einer Sylow 2-Untergruppe $\bar{T}$ von $\bar{M}$ operiert, die $\bar{L}_B$ enthält. Also operiert $\bar{u}$ auf $\mathbf{Z}(\bar{T}) \cap \bar{L}_B$. Ist $\bar{N}' \neq 1$, so folgt nun $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{T}) \cap \bar{L}_B$.

Sei $\bar{N}' = 1$ und $\mathbf{Z}(\bar{R})$ nicht stark abgeschlossen in $\bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann gibt es ein $\bar{t}^{\bar{g}} \in (\bar{L}_B \cap \bar{N}) - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$. Da $[\tilde{V}, \bar{t}^{\bar{g}}] = 1$ ist, folgt nun $\tilde{V}^{\bar{g}} = [\tilde{Q}, \bar{t}^{\bar{g}}] \leqslant \tilde{W}$. Da $\bar{N} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}^{\bar{g}}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V}^{\bar{g}})$ ist, folgt nun $[\tilde{V}^{\bar{g}}, \bar{N}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Wie in (7.1) erhalten wir nun $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann ist aber auch $\tilde{W} = \tilde{W}^{\bar{g}}$. Das liefert dann $\bar{g} \in \mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B \cap \bar{N}$. Somit ist auch in diesem Fall $\bar{u} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$.

Es ist $[\bar{u}, \bar{R}] \leqslant \bar{R}$. Also gibt es ein $\bar{v} \in \bar{R}\bar{u}$ mit $[\bar{v}, \bar{R}] \leqslant \bar{N}$, $o(\bar{v}) = q - 1$. Sei $C_{\bar{N}}(\bar{v}) \neq 1$. Dann ist $\bar{N} = \mathbf{Z}(\bar{R}) \times \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{v})$. Wähle gemäß [7] ein $w \in \mathrm{Aut}(Q)$, $o(w) = q - 1$, w fixpunktfrei auf $Q^{\#}$ und $[w, \bar{R}] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$. Dann gibt es ein $\bar{x} \in \langle w, \bar{v} \rangle$ mit $o(\bar{x}) = q - 1$ und $\tilde{Q} = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{x}) \oplus [\tilde{Q}, \bar{x}]$, wobei $[\tilde{Q}, \bar{x}] \neq 1 \neq \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{x})$ ist. Sei o. B. d. A. $\tilde{Q} = \tilde{W}\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{x})$. Da $|N| > q$ ist, folgt nun $\tilde{V} \leqslant [\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{x}), \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{x})]$. Also ist $\tilde{W} = \tilde{V} \times [\tilde{W}, \bar{x}]$. Aber $\tilde{B} \subseteq [\tilde{W}, \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{x})]$. Also ist $\tilde{W} \subseteq [\tilde{Q}, \bar{x}]$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{v}) \simeq \Omega^+(8, q)$.

Wähle $\bar{w}$ wie oben. Dann operiert $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$ auf $\tilde{W}$. Also gibt es ein $\bar{x} \in \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle^{\#}$ mit $[\tilde{W}, \bar{x}] \subseteq \tilde{V}$. Dann folgt $[Z(Q), \bar{x}] = 1$. Also ist $[\tilde{V}, \bar{x}] = \tilde{V}$. Somit ist das volle Urbild von $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\tilde{x})$ eine Erweiterung einer semiextraspeziellen Gruppe der Ordnung q^9 mit $\Omega^+(8, q)$. Das widerspricht aber [7, Satz 5].

(7.15) Lemma. *Sei $R/N \simeq \Omega^+(8, q)$. Dann erfüllt $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes. Hierbei ist wieder $H = \mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$.*

Beweis. Es ist wieder $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine *TI*-Menge in $\bar{H}$. Weiter ist nach (7.14), $n = 16$. Sei zunächst $\mathbf{Z}(\bar{N}) \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann folgt $|\mathbf{Z}(\bar{N})| = q^9$. Sei $\bar{x} \in \bar{L}_B$, $\bar{x}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$. Dann ist $[\mathbf{Z}(\bar{N}), \bar{x}]\mathbf{Z}(\bar{R}) = [\bar{L}_B, \mathbf{Z}(\bar{N})]\mathbf{Z}(\bar{R})$ von der Ordnung q^5. Weiter ist $[\mathbf{Z}(\bar{N}), \bar{x}]$ von der Ordnung q^4. Da $\mathbf{C}(\bar{x}\bar{N}) \cap \mathbf{N}_{\bar{R}}(\bar{L}_B)$ auf $[\mathbf{Z}(\bar{N}), \bar{x}]$ operiert und die Gruppe $Sp_4(q)$ involviert, folgt $[\bar{L}_B, \mathbf{Z}(\bar{N})] = [\mathbf{Z}(\bar{N}), \bar{x}]$. Also operiert $\mathbf{N}_{\bar{R}}(\bar{L}_B)$ auf $\bar{U} = [\mathbf{Z}(\bar{N}), \bar{x}]$. Sei nun $\bar{g} \in \bar{R}$ mit $\tilde{B}^{\bar{g}} = \tilde{A}$. Dann ist $\bar{R} = \langle \bar{L}_B, \bar{L}_A \rangle$. Nach (2.1) ist $\bar{U}\bar{U}^{\bar{g}}$ $\bar{R}$-invariant. Also ist $|\bar{U}\bar{U}^{\bar{g}}| = q^8$. Weiter ist $\bar{N}/\bar{U}\bar{U}^{\bar{g}}$ semiextraspeziell. Anwendung von [7, Satz 5] auf $\bar{R}/\bar{U}\bar{U}^{\bar{g}}$ liefert nun einen Widerspruch.

Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{N})$. Nach (7.7) gibt es ein $\bar{X} \subseteq \bar{L}_B$, $\bar{X} \not\subseteq \bar{N}$, $\bar{X} \sim \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann ist $\bar{x}$ vom Typ a_2. Sei $\bar{V} \subseteq \bar{N}$, $|\bar{V}| > q^3$ und $\bar{V}\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$. Sei $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ mit $\bar{x}^{\bar{g}} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann folgt $\bar{V}^{\bar{g}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} \neq 1$. Also gibt es ein $\bar{v} \in \bar{V}^{\#}$ mit $\bar{v}^{\bar{g}} \in \bar{N} - \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\bar{x}^{\bar{g}}\bar{v}^{\bar{g}} \sim \bar{v}^{\bar{g}}$. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} \not\subseteq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$.

Sei nun $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} = \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Sei $\bar{g}$ wie oben. Es ist $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X})$ ein direktes Produkt einer elementar abelschen Gruppe von der Ordnung q^4 mit einer semiextraspeziellen Gruppe der Ordnung q^9. Weiter involviert $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{X})$ die Gruppe $L_2(q) \times L_2(q) \times L_2(q)$. Nun liefert wieder die Struktur von R/N, daß $\bar{N}^{\bar{g}} \cap \bar{N}$ ein Element $\bar{w}^{\bar{g}}$ enthält, so daß $\bar{x} \sim \bar{x}\bar{w}$ unter $\bar{N}$ ist. Dann ist aber $\bar{w} \sim \bar{x}$ und $\bar{w} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Sei $\bar{N}_1 \trianglelefteq \bar{R}$, $\bar{N}_1$ abelsch, $|\bar{N}_1| = q^9$ und $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} \subseteq \bar{N}_1$. Sei $\bar{y} \in \bar{N}_1 - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{y} \sim \bar{r} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei also $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{y}^{\bar{h}} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{y})^{\bar{h}} \subseteq \mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Also ist $|\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{y})^{\bar{h}}\bar{N}/\bar{N}| \geqslant q^7$.

Sei $\bar{z} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{N})_2$. Dann folgt $[\bar{z}, \bar{R}] = 1$. Weiter folgt $[\tilde{W}, \bar{z}] \leqslant \tilde{V}$. Dann ist $|[\widetilde{Q_B \cap W}, \bar{z}]| = q^4$ oder $[\widetilde{Q_B \cap W}, \bar{z}] = 1$. Da aber $[\tilde{W}, \bar{s}]\tilde{V} = (\widetilde{Q_B \cap W})\tilde{V}$ für $\bar{s} \in \bar{L}_B - \bar{N}$, $\bar{s}$ vom Typ c_2, ist und weiter $|[\tilde{W}, \bar{s}] \cap \tilde{V}| = q^2$ ist, erhalten wir nun, daß $|\widetilde{W \cap Q_B} : \mathbf{C}_{\widetilde{W \cap Q_B}}(\bar{z})| \leqslant q^2$ ist. Das liefert nun $[\bar{z}, \widetilde{W \cap Q_B}] = 1$. Dann folgt $[\tilde{W}, \bar{z}] = 1$. Wegen $[\tilde{Q}, \bar{z}] \subseteq \tilde{V}$ folgt nun mit (2.4) $\bar{z} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$.

Somit operiert $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{y})^{\bar{h}}\bar{N}/\bar{N}$ treu auf $\bar{N}/\mathbf{Z}(\bar{R})$. Insbesondere folgt, daß $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} - \mathbf{Z}(\bar{R})$ eine $\bar{R}$-Klasse ist. Sei nun $\bar{V}$ wie oben eine Untergruppe von $\bar{N}$ von der Ordnung $> q^3$ mit $\bar{V}\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$. Dann gibt es ein $\bar{v} \in \bar{V}^{\#}$ mit $\bar{X} \sim \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\mathbf{C}(\bar{v})$. Dann folgt $\mathbf{Z}(\bar{R})\bar{X} \subseteq \bar{N}_v$. Die Struktur von $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N}$ liefert nun, daß $(\mathbf{Z}(\bar{R})\bar{X})^{\#} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$ ist.

Wir wollen zunächst annehmen, daß es kein solches $\bar{V}$ gibt. Da $|[\bar{x}, \bar{N}]| = q^5$ ist, gibt es stets ein $\bar{W} \subseteq \bar{N}$, $|\bar{W}| = q^3$ und $\bar{W}\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$. Weiter enthält $\bar{W}$ ein $\bar{w} \sim \bar{x} \sim \bar{w}\bar{x}$. Dann ist $\bar{w}^{\bar{g}} \in \bar{N}$, da es sonst ein $\bar{r} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ mit $\bar{x} \sim \bar{x}\bar{r}$ gibt. Dann ist aber $|\langle \bar{r}, \bar{W} \rangle| > q^3$ und $\langle \bar{r}, \bar{W} \rangle\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$. Das ist ein Widerspruch. Nun folgt wieder $\bar{X} \sim \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\mathbf{C}(\bar{w})$. Das liefert wieder $\mathbf{Z}(\bar{R})\bar{X} \subseteq \bar{N}_w$, ein Widerspruch. Somit haben wir, daß stets $\mathbf{Z}(\bar{R})\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$ ist. Nun gibt es ein $\bar{u} \in [\bar{N}, \bar{x}]$ mit $\bar{u} \not\sim \bar{x} \sim \bar{u}\bar{x}$. Also $\bar{u}^g \notin \bar{N}$. Insbesondere ist $\bar{u}^g\bar{x}^g \notin \bar{N}$. Dann ist aber $\mathbf{Z}(\bar{R})\bar{u}^g\bar{x}^g \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$. Da $\bar{u}^g \in \mathbf{Z}(\bar{R})\bar{u}^g\bar{x}^g$ ist, ist das ein Widerspruch.

Wir haben also, daß entweder $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\bar{R}$ ist, oder, daß $\bar{N}$ von $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N}$ erzeugt wird. Sei nun $\bar{y} \in \bar{N} - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{y} \sim \bar{r} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\bar{M}$. Dann folgt wie oben, daß $|\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{y})^g\bar{N}/\bar{N}| = q^7$ ist. Hierbei ist $\bar{y}^g \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))}(\bar{R}/\bar{N}) \neq 1$. Sei $\bar{N}_1 \subseteq \bar{N}$, $|\bar{N}_1| = q^9$ und $\bar{N}_1 \trianglelefteq \mathbf{N}_{\bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Dann folgt $[\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))}(\bar{R}/\bar{N}), \bar{N}_1] \subseteq \mathbf{Z}(\bar{R})$ und $[\bar{N}, \mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))}(\bar{R}/\bar{N})] \leqslant \bar{N}_1$. Also ist $\bar{y} \in \bar{N}_1$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist stets $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathbf{N}_{\bar{N}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Da $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{N})_2 = \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist, folgt, daß $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$ ist. Anwendung von [25, 28] liefert nun die Behauptung.

(7.16) LEMMA. *Ist $R/N \not\cong \Omega^+(6, q)$, so erfüllt $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes oder $\mathbf{F}^*(\bar{H}) \cong U_6(q)$.*

Beweis. Nach (7.9) ist R/N irreduzibel auf $\bar{N}/\mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach (7.11) ist $\bar{N}' \neq 1$. Weiter ist nach (7.13), $\bar{N} = \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Nach (7.10) ist $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\bar{L}_B) \not\subseteq \mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Nach [27] ist dann $\mathbf{F}^*(\bar{H}) \cong U_6(q)$ oder $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Im zweiten Fall liefern [25, 28] die Behauptung.

(7.17) LEMMA. *Ist $R/N \cong \Omega^+(6, q)$, so erfüllt $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes oder $\mathbf{F}^*(\bar{H}) \cong L_6(q)$.*

Beweis. Sei $\bar{L} \lhd \bar{R}$, $|\bar{L}| = q^5$. Dann ist $\bar{L}$ elementar abelsch. Sei weiter $\bar{L}$ normal in $\mathbf{N}_{\bar{H}}(Z(\bar{R}))$. Sei zunächst $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})) \subseteq \bar{N}$. Setze $\bar{M}_1 = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$. Nach [21] ist $\bar{M}_1/\mathbf{Z}(\bar{M}_1)$ zu $L_r(2^f)$, $U_3(2^f)$, $Sz(2^f)$, $G_2(2^f)$, $G_2(2)'$, ${}^3D_4(2^f)$, A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24} oder J_2 isomorph. Nach (4.5) ist $R \subseteq \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$. Da $q > 2$ ist, folgt nun, daß $\mathbf{F}^*(\bar{H}) = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$ eine zentrale Erweiterung von $L_6(q)$ ist.

Sei nun $\bar{X} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B - \bar{N}$. Die Operation von $\bar{R}$ liefert, daß alle Elemente aus $\bar{X}$ vom Typ a_2 auf $\bar{V}$ sind. Es ist $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X})$ ein direktes Produkt einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung q^2 mit einer semiextraspeziellen Gruppe von der Ordnung q^5. Weiter involviert $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{X})$ die Gruppe $L_2(q)$. Sei nun $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ mit $\bar{X}^{\bar{g}} = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann folgt $|\bar{N}^{\bar{g}} \cap \bar{N}| \geqslant q^2$ und $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))^{\bar{g}} \cap \bar{N}| \geqslant q^2$. Nach [25, (2.18)] können wir ein Element $\bar{u}$ in $\bar{M}$ finden, so daß $o(\bar{u}) = q - 1$ und $[\bar{R}, \bar{u}] \leqslant \bar{N}$ ist. Weiter ist $\bar{u}$ transitiv auf $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$. Das liefert nun, daß $\bar{X} \subseteq \mathbf{Z}(\bar{R})\,\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{u})$ ist. Sei nun $\bar{Y} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$, $|\mathbf{Z}(\bar{R}) : \bar{Y}| = 2$ und $\bar{Y}\bar{x} \subseteq \bar{x}^{\bar{M}}$ für ein $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann folgt, daß es ein $\bar{w} \in \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))^{\#}$ mit $\bar{w}^{\bar{g}} \in \bar{N}$ und $\bar{x} \sim \bar{x}\bar{w}$ gibt. Die Operation von $\bar{x}$ liefert, daß wir $\bar{w} \in \bar{L}$ wählen können. Insbesondere sind alle Involutionen aus $\bar{L}$ in $\bar{M}$ konjugiert. Sei nun $\mathbf{Z}(\bar{R})$ schwach abgeschlossen in $\bar{L}$. Dann gibt es obiges $\bar{Y}$ nicht. Also ist $\bar{X} \subseteq \mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{u})$. Weiter ist stets $\bar{x}\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap$

$\bar{x}^{\bar{M}} = \{\bar{x}\}$. Somit ist nun $\bar{X} \sim \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X})$. Also ist sogar $\bar{X} \sim \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\langle \bar{N}, \bar{N}^{\bar{g}} \rangle = \bar{N}_1$. Es hat $\bar{X}$ genau $q^2 + 1$ Konjugierte unter $\bar{N}_1$. Weiter ist $\bar{N}\mathbf{C}_{\bar{N}_1}(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X})/\mathbf{C}_{\bar{N}_1}(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X})$ eine TI-Menge in $\bar{N}_1/\mathbf{C}_{\bar{N}_1}(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X}$. Anwendung von [20] liefert nun $\bar{N}_1/\mathbf{C}_{\bar{N}_1}(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X}) \cong \Omega^-(4, q)$ mit natürlicher Operation auf $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{X}))\bar{X}$. Da $|\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))}(\bar{R}/\bar{N}| \mid q - 1$ erhalten wir nun einen Widerspruch zu der Struktur von $\bar{N}_1$. Also sind stets alle Involutionen in $\bar{L}$ in $\bar{H}$ konjugiert.

Sei nun $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ und $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L} - \mathbf{Z}(\bar{R})$. Die Operation von $\bar{R}$ auf $\tilde{Q}$ liefert leicht, daß $[[\bar{s}, \tilde{Q}], \bar{L}] = 1$ für alle $\bar{s} \in \bar{L}^{\#}$ ist. Das liefert $\langle \bar{L}, \bar{L}^{\bar{g}} \rangle \leqslant \bar{N}^{\bar{g}}$. Die Struktur von $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{t}^{\bar{g}})$, liefert nun, daß $\bar{L}$ und $\bar{L}^{\bar{g}}$ in einer Sylow 2-Untergruppe von $\bar{R}^{\bar{g}}$ normal sind. Da $\bar{R}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{H}$ enthält, folgt nun $\bar{L} = \bar{L}^{\bar{g}}$.

Somit sind alle Involutionen aus $\bar{L}$ in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L})$ konjugiert. Da $\bar{L}$ in $\mathbf{C}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ normal ist, folgt nun, daß $\bar{L}$ eine TI-Menge in $\bar{H}$ ist. Mit [20] erhalten wir nun $\mathbf{F}^*(\bar{H}) \cong L_6(q)$.

Sei nun $\bar{L}$ nicht normal in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Mit (7.13) folgt dann, daß $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler in $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ ist. Mit [27] (beachte $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\bar{L}_B) \not\subseteq \mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$), [25, 28] erhalten wir jetzt die Behauptung.

8. Der Fall $R/N = Sp_{2m}(q)$

In diesem Paragraphen gelten weiter die Voraussetzungen von Sektion 4. Weiter sei für ein $t \in L_B$ die Gruppe R_t/N_t zu $Sp_{2m}(q)$ isomorph. Setze $\bar{R} = \bar{R}_t$ und $\bar{N} = \bar{N}_t$. Sei $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\bar{R}}$ mit $\langle L_A, L_B \rangle = R$. Es sei schließlich $m \geqslant 2$. Nach (5.4) ist dann $|\bar{N}| > q$.

(8.1) Lemma. *Es gilt eine der folgenden Aussagen*:

(a) *Es gibt ein* $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ *mit* $\bar{s}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \not\subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$.

(b) $R/N \cong Sp_4(q)$. *Weiter gibt es ein* $\bar{x} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \cap \bar{t}^{\bar{M}}$ *mit* $[\tilde{W}_1, \bar{x}] \not\subseteq \tilde{V}_1$. *Es ist* $[\tilde{V}_1, \bar{x}] = 1$ *für alle* $\bar{x} \in \bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$.

Beweis. Setze $\bar{F} = \langle \bar{t}^{\bar{g}} \mid \bar{t}^{\bar{g}} \in (\bar{L}_B)^{\bar{g}} \leqslant \bar{R}, \bar{g} \in \bar{M} \rangle$. Sei die Behauptung falsch. Dann ist $\bar{F} \leqslant \bar{N}$. Sei nun $\bar{x} = \bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) - \bar{F}$. Sei $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} \neq 1$. Dann können wir $\tilde{B} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} \neq 1$ annehmen, da $\bar{R}$ transitiv auf $\tilde{V}^{\#}$ operiert. Dann ist aber $\bar{L}_B \subseteq \bar{R}^{\bar{g}}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$. Es operiert $\bar{x}$ auf $\tilde{V}_1$. Da $[\tilde{V}, \bar{x}] = 1 = [\tilde{V}_1, \bar{N}]$ ist, folgt nun mit (5.3) auch $[\tilde{V}_1, \bar{x}] = 1$. Nach (5.3) ist $[W_1/V_1, \bar{x}] = 1$ oder ein R/N-Modul gemäß (2.1). Der zweite Fall liefert $m = 2$ und wir haben (b).

Also können wir $[\tilde{W}_1, \bar{x}] \leqslant \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ annehmen. Das liefert nun $|[\tilde{W}_1, \bar{x}]| \leqslant q$. Ist $[\tilde{W}_1, \bar{x}] = 1$, so ist $[\bar{R}, \bar{x}] \leqslant \mathbf{C}_{\bar{R}}(\tilde{W}_1) = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Das 3-Untergruppenlemma liefert nun $[\bar{R}', \bar{x}] = 1$. Dann ist aber $\tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{V}_1$ ein R/N-Modul. Das ist ein Widerspruch.

Somit ist $[\tilde{W}_1, \bar{x}] \neq 1$. Da $\bar{R}$ auf $\bigcap_{\tilde{\alpha}\in\tilde{V}^{\#}}(\widetilde{Q \cap Q_\alpha})$ operiert, folgt $\bigcap_{\tilde{\alpha}\in\tilde{V}^{\#}}(\widetilde{Q \cap Q_\alpha}) = 1$. Also ist o. B. d. A. $[\tilde{W}_1, \bar{x}] \cap \widetilde{V_1 \cap Q_B} = 1$. Also ist $[\widetilde{W_1 \cap Q_B}, \bar{x}] = 1$. Das liefert $[\bar{L}_B, \bar{x}] \leqslant \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{W_1 \cap Q_B}) = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Da $\langle \bar{N}, \bar{x}\rangle$ von $\bar{R}$ normalisiert wird, liefern nun (5.1) und (2.1)(a), daß es ein $\bar{r} \in \bar{L}_B \cap \bar{N}$ gibt, so daß $[\bar{R}, \bar{x}\bar{r}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$ sind. Das 3-Untergruppenlemma liefert dann wieder $[\bar{R}', \bar{x}\bar{r}] = 1$. Also ist $\bar{L}_B = \mathbf{Z}(\bar{R})\,\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{x})$. Ist $[\bar{x}, \mathbf{Z}(\bar{R})] = 1$, so folgt nun $[\bar{L}_B, \bar{x}] = 1$. Das ist aber nach (3.5) und $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = 1$ ein Widerspruch. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R})) \leqslant \bar{N}$.

Klar ist, daß $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine TI-Menge ist. Sei $\bar{T}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ und $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{T})$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$. Weiter sei $\bar{T}$ so gewählt, daß $\bar{N}\bar{L}_B \leqslant \bar{T}$ ist. Dann ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Nun ist $[\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}, \bar{N}] = 1$. Nach (5.3) ist $\tilde{V}_1 = \langle \widetilde{V_1 \cap Q_B}, \tilde{A}\rangle$. Weiter ist $[\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}, \tilde{Q}] \leqslant \tilde{W}$. Also ist $[A, A^g] = 1$. Weiter ist $g \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(Q \cap Q_B)$. Also ist auch $[V_1 \cap Q_B, (V_1 \cap Q_B)^g] = 1$. Das liefert nun $[V_1, V_1{}^g] = 1$. Somit ist $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{W}_1$.

Sei nun $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \in \tilde{V}_1{}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \in \widetilde{Q_B \cap W_1}$, $\tilde{\beta} \in \widetilde{Q_A \cap W_1} - \tilde{V}_1$. Dann ist $[\tilde{\beta}, \bar{L}_A \cap \bar{N}] = \tilde{A}$. Weiter ist $[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \bar{L}_A \cap \bar{N}] \leqslant \tilde{V}_1{}^{\bar{g}}$. Zu jedem $\tilde{a} \in \tilde{A}^{\#}$ gibt es ein $\tilde{y} \in \widetilde{V_1 \cap Q_A \cap Q_B}$ und ein $\bar{u} \in \bar{L}_A \cap \bar{N}$, so daß $[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \bar{u}] = \tilde{y}\tilde{a}$ ist. Da $\langle \tilde{B}, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}\rangle$ in $\langle \tilde{B}, [\tilde{y}\tilde{a}, \bar{L}_B]\rangle$ enthalten ist, folgt nun $\tilde{V}^{\bar{g}} = \tilde{V}$ oder $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei $\tilde{V}^{\bar{g}} = \tilde{V}$. Dann ist $\tilde{A}^{\bar{g}} \not\subseteq \widetilde{Q_B \cap V}$. Also ist $\bar{R} = \langle \bar{L}_{A^g}, \bar{L}_B\rangle$ nach (2.1). Nun folgt $R^g = \langle L_A, L_B\rangle^g = \langle L_{A^g}, L_B\rangle = R$. Somit ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Insbesondere enthält $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$.

Sei nun $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{V}_1(\widetilde{W_1 \cap Q_B})$. Da $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} \not\subseteq \widetilde{W_1 \cap Q_B}$ gibt es ein $\tilde{\alpha}\tilde{a} \in \tilde{V}_1{}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W_1 \cap Q_B}$ und $\tilde{a} \in \tilde{A}^{\#}$. Somit ist $\widetilde{V \cap Q_B} \leqslant \langle \tilde{B}, [\bar{L}_B, \tilde{\alpha}\tilde{a}]\rangle \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}} \cap \widetilde{Q_B \cap Q}$. Also ist $\tilde{V} \cap \tilde{Q}_B = (\tilde{V} \cap \tilde{Q}_B)^{\bar{g}}$. Nach (3.12) gibt es dann $\tilde{C}, \tilde{D} \in \tilde{B}^{\bar{R}} \cap \widetilde{Q_B \cap V}$ mit $R = \langle L_C, L_D\rangle$. Das liefert nun wieder $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{R})$. Also ist $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$ enthält. Nach [21, Korollar 2] ist $\bar{M}_1 = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}}\rangle$ eine zentrale Erweiterung von A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24}, $L_r(2^f)$, $U_3(2^f)$, $Sz(2^f)$, $G_2(2^f)$, $U_3(3)$, ${}^3D_4(2^f)$ oder J_2. Nach (4.5) ist $\bar{R} \leqslant \bar{M}_1$. Das ist aber ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

(8.2) Lemma. *Es gibt stets ein* $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ *mit* $\bar{s}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \not\subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$.

Beweis. Angenommen falsch. Nach (8.1) ist dann $R/N \simeq Sp_4(q)$. Setze $\bar{B}_0 = \langle \bar{t}^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \mid \bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}\rangle$. Dann ist $\bar{B}_0 \subseteq \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Sei $\bar{t}_1 \in \bar{B}_0 \cap \bar{t}^{\bar{M}}$, $\bar{t}_1 \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei $\bar{t}_1 = \bar{t}^{\bar{g}}$ mit $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Es ist $[\tilde{V}_1, \bar{t}_1] = 1$. Also ist $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{W}_1$. Sei nun $|\bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{t}_1)| < q$. Sei $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \in \tilde{V}_1{}^{\bar{g}}$, $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W_1 \cap Q_B}$, $\tilde{\beta} \in \widetilde{W_1 \cap Q_A} - \tilde{V}_1$. Dann gibt es ein $\bar{y} \in \mathbf{C}_{\bar{L}_A \cap \bar{N}}(\bar{t}_1)$ mit $1 \neq \tilde{a} = [\tilde{\beta}, \bar{y}] \in \tilde{A}$. Dann ist $[\bar{y}, \tilde{\alpha}\tilde{\beta}] = \tilde{u}\tilde{a}$ mit

$\bar{u} \in \overbrace{\bar{V}_1 \cap Q_A \cap Q_B}$. Es ist $\langle \tilde{B}, \overbrace{V \cap Q_A \cap Q_B}, \tilde{u}\tilde{a} \rangle \leqslant \langle \tilde{B}, [\tilde{u}\tilde{a}, \bar{L}_B], \tilde{u}\tilde{a} \rangle \leqslant \tilde{V}_1{}^{\bar{g}}$. Dann folgt $\tilde{V}^{\bar{g}} = \tilde{V}$ oder $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} = \tilde{V}_1$. In beiden Fällen folgt $\bar{g} \in \mathbf{N}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\tilde{V}_1{}^{\bar{g}} \subseteq \tilde{V}_1(\overbrace{W_1 \cap Q_B})$. Dann folgt $\overbrace{V \cap Q_B} = \tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{Q}_B$. Dann folgt wieder $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Dieser Widerspruch zeigt $|\bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{t}_1)| = q$. Nun folgt wie in (7.3)(2), daß alle Elemente aus $\bar{B}_0 - \{1\}$ konjugiert sind oder $\bar{B}_0 = \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist.

Ist $\bar{B}_0 \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$, so folgt wie in (7.4), daß $|\bar{B}_0| = q^3$ ist. Wähle nun $\bar{x}$ gemäß (8.1)(b). Sei $\bar{h} \in \bar{R}$ mit $\tilde{B}^{\bar{h}} = \tilde{A}$. Setze $\bar{N}_0 = \bar{B}_0\bar{B}_0{}^{\bar{h}}$. Es ist $\bar{N}_0 \lhd \bar{R}$. Es ist $[W_1/V_1, \bar{x}]$ ein Modul gemäß (2.1). Also ist $|[W_1/V_1, \bar{x}]| = q^4$. Das liefert $\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}^{\bar{m}} = 1$, wobei $\bar{t}^{\bar{m}} = \bar{x}$ sei. Weiter haben wir $\tilde{V}^{\bar{m}} \subseteq \tilde{W}_1$. Schließlich haben wir $|\tilde{V}_1(\overbrace{Q_B \cap W_1}) \cap \tilde{V}^{\bar{m}}| = q^2$. Nach (5.3) ist $|\tilde{V}_1(\overbrace{Q_B \cap W_1}) : \overbrace{Q_B \cap W_1}| = q$. Also ist $\overbrace{Q_B \cap W_1} \cap \tilde{V}^{\bar{m}} \neq 1$. Wähle $\tilde{\alpha} \in (\overbrace{Q_B \cap W_1}) \cap \tilde{V}^{\bar{m}})^{\#}$. Dann ist $\tilde{\alpha} \in Q_B$ und $\bar{x} \in \bar{L}_\alpha$. Nach [25, (2.18)] ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle / \mathbf{O}_2\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle \cong L_2(q)$. Setze $\bar{Z} = \bar{L}_B \cap \bar{L}_\alpha$. Es ist $[\bar{B}_0, \bar{L}_\alpha \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle)] \leqslant \bar{B}_0 \cap \bar{Z}$. Sei zunächst $\bar{B}_0 \cap \bar{Z} = 1$. Dann folgt $[\bar{x}, \bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle)] = 1$. Also ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{x})| \leqslant q$. Da $q > 2$ ist, ist $[\bar{L}_B, \bar{x}] \leqslant \bar{N}_0$. Also ist $[\bar{L}_B{}^{\bar{h}}, \bar{x}] \leqslant \bar{N}_0$, für alle $\bar{h} \in \bar{R}$. Dann ist $[\bar{R}, \bar{x}] \leqslant \bar{N}_0$. Sei nun $\bar{B}_0 \cap \bar{Z} \neq 1$. Sei $1 \neq \bar{f} \in \bar{B}_0 \cap \bar{Z}$. Dann ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_\alpha \rangle \leqslant \bar{R}_{\bar{f}}$. Sei $\bar{n} \in \bar{M}$ mit $\bar{R}^{\bar{n}} = \bar{R}_{\bar{f}}$. Dann ist $\bar{x} \in (\bar{N}_0)^{\bar{n}}$. Also ist $[\bar{x}, \bar{L}_B] \leqslant \bar{B}_0$. Dann folgt $[\bar{R}, \bar{x}] \leqslant \bar{N}_0$.

Insgesamt haben wir somit $[\bar{R}, \bar{x}] \leqslant \bar{N}_0$ für jedes $\bar{x}$ gemäß (8.1)(b) gezeigt. Da $\bar{N}_0/\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein irreduzibler R/N-Modul ist, folgt nun $[\bar{N}_0, \bar{x}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei nun $\bar{u} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ und $\bar{y} = \bar{u}^{\bar{c}} \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}(\bar{R})) - \bar{R}$, $\bar{c} \in \bar{M}$. Sei weiter $\bar{w} = [\bar{x}, \bar{y}] \neq 1$. Nach dem 3-Untergruppenlemma gilt dann $[\bar{R}, \bar{w}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach (5.1) ist dann $[\bar{R}, \bar{w}] = 1$. Nun ist $[\tilde{W}_1, \bar{w}] \leqslant [\tilde{W}_1, \bar{x}][\tilde{W}_1, \bar{y}]$. Da $[\tilde{W}_1, \bar{w}]$ von $\bar{R}$ normalisiert wird, folgt $\tilde{V} \leqslant [\tilde{W}_1, \bar{w}]$ oder $[\tilde{W}_1, \bar{w}] = 1$. Sei zunächst $\tilde{V} \subseteq [\tilde{W}_1, \bar{w}]$. Dann ist $\tilde{V}[\tilde{W}_1, \bar{x}] \leqslant [\tilde{W}_1, \bar{x}][\tilde{W}_1, \bar{y}]$. Dann folgt aber wegen $|[\tilde{W}_1, \bar{x}]| = |[\tilde{W}_1, \bar{y}]| = q^4$, daß $\tilde{V}[\tilde{W}_1, \bar{x}] = [\tilde{W}_1, \bar{x}][\tilde{W}_1, \bar{y}] = \tilde{V}[\tilde{W}_1, \bar{y}]$ ist. Das liefert nun $[\tilde{W}_1, \bar{x}, \bar{y}] = 1 = [\tilde{W}_1, \bar{y}, \bar{x}]$. Nach dem 3-Untergruppenlemma ist dann $[\tilde{W}_1, \bar{w}] = 1$. Das ist ein Widerspruch.

Somit haben wir $[\tilde{W}_1, \bar{w}] = 1$ gezeigt. Da $[\tilde{W}, \bar{w}]$ R-invariant ist, folgt nun mit (5.3) $[\tilde{W}, \bar{w}] = 1$. Das liefert nun $[\tilde{Q}, \bar{w}] = \tilde{V}$. Nach (2.4) ist dann $\bar{w} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Setze $\bar{E} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \mid [\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}, \mathbf{Z}(\bar{R})] = 1,\ \bar{g} \in \bar{M} \rangle$. Dann haben wir eben $\bar{E}' \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$ gezeigt. Weiter ist nach der Struktur von $\bar{N}_0$ klar, daß $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$ enthält. Schließlich ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine TI-Menge in $\bar{M}$. Nun liefert die Anwendung von [21, Korollar 2] einen Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

(8.3) Lemma. *Ist $R/N \cong Sp_{2m}(q)$, $m \geqslant 2$, so gilt eine der folgenden Aussagen*:

(1) $n = 11$ ***und*** $R/N \cong Sp_6(q)$, $|\bar{N}| = q^9$.

(2) $n = 17$ *und* $R/N \cong Sp_8(q)$, $|\bar{N}| = q^{17}$.

Beweis. Nach (8.1) und (8.2) gibt es ein $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ und ein $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\bar{s}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B - \bar{N}$. Nach (5.3) und (2.1) ist $|W_1/V_1| = q^x$ mit $x = y2^m$, $y \in \mathbb{N}$ geeignet. Ist $\bar{s}^{\bar{g}}$ nicht vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$, so folgt mit (2.1), $|[W_1/V_1, \bar{s}^{\bar{g}}]| = q^{(x/2)}$. Ist $\bar{s}^{\bar{g}}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$, so gibt es ein $\bar{r} \in \bar{R}$, so daß $\bar{s}^{\bar{g}\bar{r}}\bar{s}^{\bar{g}} \notin \bar{N}$ ist. Weiter ist $\bar{s}^{\bar{g}\bar{r}}\bar{s}^{\bar{g}}$ nicht vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$. Nach (2.1) ist dann $|[W_1/V_1, \bar{s}^{\bar{g}}]| \geqslant q^{(x/4)}$ Schließlich ist $|[\tilde{V}_1, \bar{s}^{\bar{g}}]| \geqslant q$. Also ist $2m \geqslant (x/4) + 2$. Das ergibt die folgenden Möglichkeiten $m = 2$ und $x = 4$ oder 8, $m = 3$ und $x = 8$ oder 16, $m = 4$ und $x = 16$ und $m = 5$ und $x = 32$. Für $m = 5$, $m = 2$ und $x = 8$ und $m = 3$ und $x = 16$ haben wir in obiger Ungleichung die Gleichheit. Also ist $|[\tilde{V}, \bar{s}^{\bar{g}}]| = q$. Dann ist $\bar{s}^{\bar{g}}$ nicht vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$. Also ist $|[W_1/V_1, \bar{s}^{\bar{g}}]| = q^{(x/2)}$. Das ist aber ein Widerspruch.

Sei nun $m = 2$ und $x = 4$. Dann ist $|W_1/V_1| = q^4$. Da R/N transitiv auf $(W_1/V_1)^{\#}$ operiert, folgt nun, daß W_1 abelsch ist. Das ist aber ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

(8.4) Lemma. *Es ist $\bar{N}' \neq 1$.*

Beweis. Sei $\bar{N}' = 1$. Sei weiter zunächst $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Nach (8.2) gibt es ein $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $Z(\bar{R}) \neq \bar{X} = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \subseteq \bar{L}_B$. Setze $\bar{Y} = [\bar{N}, \bar{x}]$ für ein $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann ist $\bar{Y}^{\bar{g}^{-1}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = 1$. Es folgt, daß $n = 11$ und $\bar{x}$ vom Typ b_1 oder a_2 auf $\tilde{V}$ oder $n = 17$ und $\bar{x}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ ist. Das liefert nun $|\bar{Y}^{\bar{g}^{-1}}\bar{N}/\bar{N}| \leqslant q^2$ bzw. q^3. Insbesondere folgt nun mit (5.1) in beiden Fällen $\bar{x}$ vom Typ a_2. Weiter folgt nun $R/N \simeq Sp_6(q)$ und $|\bar{Y}| = q^2$. Weiter folgt $\bar{Y} = [\bar{N}, \bar{x}]$ für alle $\bar{x} \in \bar{X}^{\#}$. Dann gibt es aber ein $\bar{Z} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$ mit $|\mathbf{Z}(\bar{R}) : \bar{Z}| = 2$, so daß $\bar{Z}\bar{x}$ nur zu $\bar{x}$ konjugierte Involutionen enthält. Das liefert nun $(\bar{Z} \times \bar{Y})^{\bar{g}^{-1}} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = 1$. Weiter sind alle Involutionen aus $(\bar{Z} \times \bar{Y})^{\bar{g}^{-1}}$ vom Typ a_2. Wegen $q > 2$ ist das ein Widerspruch.

Somit gibt es ein $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ mit $\bar{s}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B \cap \bar{N} - \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{g} \in \bar{M}$. Dann ist $\bar{N} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{s}^{\bar{g}}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V}_1{}^{\bar{g}})$. Wie in (8.1) folgt nun $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{R})$. Das ist ein Widerspruch.

(8.5) Lemma. *Sei $\bar{H} = \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))$. Dann ist $\bar{N} = \mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$.*

Beweis. Wie in (7.12) folgt, daß $\mathbf{F}^*(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$ eine 2-Gruppe ist. Sei nun $\bar{x} \in \mathbf{O}_2(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R})))$. Dann ist $[\bar{x}, \bar{R}] \leqslant \bar{N}$. Also ist $[\bar{x}, \tilde{V}_1] = 1$. Da $[\bar{x}, W_1/V_1]$ ein R/N-Modul gemäß (2.1) ist, folgt aus der irreduziblen Operation auf W_1/V_1, daß $[\tilde{W}_1, \bar{x}] \leqslant \tilde{V}_1$ ist. Sei nun $\bar{x} \notin \bar{N}$. Die Operation von $\bar{R}$ auf $\bar{N}$ liefert, daß es ein $\bar{y} \in \bar{R}$, $o(\bar{y})$ ungerade, gibt, so daß $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{y}) = \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist. Wir können $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$ annehmen. Also ist $[\bar{N}, \bar{x}] = [\mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{x}]$. Ist $[\mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{x}] = 1$, so ist $[\bar{R}, \bar{x}] = 1$. Also operiert $\bar{R}$ auf $[\tilde{W}_1, \bar{x}]$. Das liefert $[\tilde{W}_1, \bar{x}] = 1$. Weiter operiert $\bar{R}$ auf $[\tilde{W}, \bar{x}]$. Somit ist auch $[\tilde{W}, \bar{x}] = 1$. Also ist $[\tilde{Q}, \bar{x}] = \tilde{V}$. Das widerspricht aber (2.4).

Sei nun $[\bar{x}, \mathbf{Z}(\bar{R})] \neq 1$. Sei $\bar{T}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$ mit $\bar{N}\bar{L}_B \leqslant \bar{T}$. Nach (8.4) ist nun $\mathbf{Z}(\bar{T}) < \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach [25, (2.18)] gibt es ein $\bar{u} \in \bar{M} - \bar{H}$, $o(\bar{u}) = q - 1$. Weiter operiert $\langle \bar{u} \rangle$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$. Wir können $\bar{u}$ so wählen, daß $\bar{u} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{T})$ ist. Das widerspricht aber $\mathbf{Z}(\bar{R}) > \mathbf{Z}(\bar{T})$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(8.6) LEMMA. *Es erfüllt* $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ *die Voraussetzungen des Hauptsatzes.*

Beweis. Nach (8.5) und (8.4) und der Tatsache, daß R/N irreduzibel auf $\bar{N}/\mathbf{Z}(\bar{R})$ operiert, folgt, daß $\mathbf{Z}(\bar{R})$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ ist. Sei $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \neq 1$. Dann ist $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Wir können o. B. d. A. $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ annehmen. Also ist $\tilde{A}^{\bar{g}} \not\subseteq \widetilde{V \cap Q_B}$. Das liefert $\bar{R} = \langle \bar{L}_A, \bar{L}_B \rangle = \langle \bar{L}_{A^{\bar{g}}}, \bar{L}_B \rangle = \langle \bar{L}_A, \bar{L}_B \rangle^{\bar{g}} = \bar{R}^{\bar{g}}$. Somit ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}$. Also ist $\{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$ eine *TI*-Menge. Sei $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} = \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Nach (8.2) ist $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R})) \not\supseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Somit liefert [27] einen Widerspruch. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{N} \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$. Dann liefern [25, 28] die Behauptung.

9. DER FALL $R/N = \Omega^+(4, q)$

In diesem Paragraphen gelten weiter die Voraussetzungen von Sektion 4. Weiter sei für ein $\bar{t} \in \bar{L}_B{}^\#$ die Gruppe $\bar{R}_t/\bar{N}_t$ zu $\Omega^+(4, q)$ isomorph. Setze $\bar{R} = \bar{R}_t$ und $\bar{N} = \bar{N}_t$. Es sei $\tilde{A} \in \tilde{B}^{\bar{R}}$ mit $\langle \bar{L}_A, \bar{L}_B \rangle = \bar{R}$. Schließlich wollen wir noch annehmen, daß für alle $\bar{\tau} \in \bar{L}_B{}^\#$ stets $|\bar{N}_\tau| > q$ sei.

(9.1) LEMMA. *Es gelten die folgenden Aussagen*:

(a) $\tilde{V}$ *ist der natürliche* R/N-*Modul.*

(b) *Sei* $W = \mathbf{C}_Q(V)$ *und* $W^* = W/V$. *Dann gilt* $W^* = (Q_A \cap W)^* \oplus (Q_B \cap W)^*$. *Weiter ist* $[W^*, \bar{N}] = 1$.

(c) $\tilde{V}$ *und* Q/W *sind äquivalente* $F_q(R/N)$-*Moduln. Dabei ist* $xW \to \widetilde{[x, \bar{t}]}$ *ein* $\bar{R}$-*Isomorphismus von* Q/W *auf* $\tilde{V}$.

Beweis. (a) und (c) stehen bereits in (3.10). Es ist $\widetilde{Q_A \cap Q_B \cap Q} \leq \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$, da Q_B semiextraspeziell ist. Nach (c) ist $|(Q_B \cap Q)W/W| = q$. Aus Ordnungsgründen folgt nun $W = (Q_A \cap W) \times (Q_B \cap W)$. Da $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \widetilde{Q_A \cap W}] \leq \widetilde{Q_A \cap Q_B \cap W} \leq \tilde{V}$ ist, folgt nun (b).

(9.2) SATZ. *Sei* $\bar{x} \in \bar{L}_B - \bar{N}$ *mit* $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{x}] = 1$. *Setze* $\bar{R}_0 = \bar{N}\langle \bar{x}^{\bar{R}} \rangle$. *Dann ist* $\bar{R} = \bar{R}_0 \times \bar{Y}$ *mit* $\bar{Y} \simeq L_2(q)$. *Weiter ist* $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{R}_0] = 1$.

Beweis. Klar ist $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{R}_0] = 1$. Nach (9.1)(b) ist $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{R}] \neq 1$. Also ist $\bar{R}_0/\bar{N} \simeq L_2(q)$. Sei nun $p \mid q + 1$, $\bar{S}$ eine Sylow p-Untergruppe von $\bar{R}$ und $\bar{U} = \mathbf{N}_{\bar{R}}(\bar{S})$. Da $\mathbf{Z}(\bar{R}) = \bar{L}_B \cap \bar{L}_A$ ist, folgt $\bar{U} = \mathbf{Z}(\bar{R}) \times \bar{X} \times \bar{F}$, wobei $\bar{X}$ und $\bar{F}$ Diedergruppen der Ordnung $2(q + 1)$ sind. Sei $\mathbf{Z}(\bar{R}) \times \bar{X} = \bar{U} \cap \bar{R}_0 \trianglelefteq \bar{U}$. Sei weiter $\bar{E}$ ein Komplement zu $\mathbf{Z}(\bar{R}) \times \bar{X}$ in $\bar{U}$. Wähle $\bar{E}$ mit $[\bar{R}_0, \bar{E}] \leq \bar{N}$.

Da $\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{R}/\bar{N}$ ist, können wir $\bar{L}_B \cap \bar{N}\bar{E} \nleqslant \bar{L}_B \cap \bar{N}$ annehmen. Da alle Sylow p-Untergruppen von $\bar{N}\bar{E}$ unter $\bar{N}$ konjugiert sind, können wir $\bar{L}_B \cap \bar{E} \neq 1$ annehmen.

Da $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{R}_0] = 1$ und $\bar{R} = \langle \bar{R}_0, \bar{L}_B, \bar{E} \rangle$ ist, folgt mit (9.1)(b), daß $(Q_A \cap W)^*$ zu $(Q_B \cap W)^*$ unter $\bar{E}$ konjugiert ist. Also operiert $\bar{E}'$ fixpunktfrei auf $\tilde{W}/\tilde{V}$. Weiter operiert $\bar{E}'$ fixpunktfrei auf $\tilde{V}$. Also ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{E}') = 1$. Setze nun $\tilde{W}_0 = \mathbf{C}_{\tilde{W}}((\bar{U} \cap \bar{R}_0)')$. Es ist $\mathbf{C}_{\tilde{V}}((\bar{U} \cap \bar{R}_0)') = 1$. Somit ist $\tilde{W} = \tilde{V} \oplus \tilde{W}_0$. Es normalisiert $\bar{U}$ die Gruppe $\tilde{W}_0$. Nach (9.1) ist dann $\tilde{W}_0 = (\widetilde{W_0 \cap Q_A}) \oplus (\widetilde{W_0 \cap Q_B})$. Sei $\bar{L}_C \neq \bar{L}_B$, $\bar{L}_B \sim \bar{L}_C$ unter $(\bar{U} \cap \bar{R}_0)'$. Dann ist $\widetilde{W_0 \cap Q_B} = \widetilde{W_0 \cap Q_C}$. Wegen $|\widetilde{Q_B \cap Q_C \cap V}| = q^2$ und $|\widetilde{Q \cap Q_B} : \widetilde{Q_B \cap W}| = q$, folgt nun $|\widetilde{Q \cap Q_B} : \widetilde{Q \cap Q_B \cap Q_C}| \leqslant q^2$. Es ist $[\bar{L}_B \cap \bar{L}_C, \widetilde{Q \cap Q_B \cap Q_C}] \leqslant \tilde{B} \cap \tilde{C} = 1$. Es ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{Q_B \cap V})| = q^2$. Also ist $|\bar{L}_B \cap \bar{L}_C : \mathbf{C}_{\bar{L}_B \cap \bar{L}_C}(\widetilde{Q_B \cap V})| \leqslant q$. Somit ist $|\bar{L}_B \cap \bar{L}_C| \leqslant q^2$, da $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\widetilde{Q \cap Q_B}) = 1$ ist. Sei nun $\bar{e} \in \bar{E} \cap \bar{L}_B$. Dann ist $\bar{e} \in \bar{L}_B \cap \bar{L}_C$. Also ist $|\bar{N} : \bar{N} \cap \langle \bar{L}_B, \bar{L}_C \rangle| < q$. Es ist $\bar{e} \in \bar{L}_B \cap \bar{L}_C \leqslant \mathbf{Z}(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_C \rangle)$. Somit ist $|\bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{e})| < q$. Das liefert nun $[\bar{E}', \bar{N}] = 1$. Das liefert nun $[\bar{E}', \bar{R}_0] = 1$. Somit ist $\mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{R}_0)\bar{R}_0/\bar{R}_0 \cong L_2(q)$. Das liefert nun die Behauptung.

(9.3) Lemma. *Es ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ nicht stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ bezüglich $\bar{M}$.*

Beweis. Sei $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Sei weiter $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\bar{t}_1 = \bar{t}^{\bar{g}} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R})) - \mathbf{Z}(\bar{R})$, für ein $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$.

(1) $\tilde{B}^{\bar{R}} = \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$. Sei $\tilde{C} \in (\tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}) - \tilde{B}^{\bar{R}}$. Dann ist o. B. d. A. $C \leqslant Q_A \cap Q_B$. Setze $\bar{C}_1 = \mathbf{C}_{\bar{L}_C}(\tilde{B})$, $\bar{C}_2 = \mathbf{C}_{\bar{L}_C}(\tilde{A})$. Es ist $\langle A, B \rangle \leqslant Q_C$. Somit ist $|\bar{L}_C : \bar{C}_1| = q = |\bar{L}_C : \bar{C}_2|$. Da $\langle A, B, \mathbf{Z}(Q) \rangle$ eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung q^3 ist, folgt $|\bar{C}_1 : \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2| = q$. Also ist $\bar{L}_C = \bar{C}_1\bar{C}_2$. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\bar{L}_B$ und $\bar{L}_A$ stark abgeschlossen ist, folgt nun $\bar{C}_i \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$, $i = 1, 2$. Also ist $\bar{L}_C \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Somit ist $[\mathbf{Z}(\bar{R}), \bar{L}_C] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{L}_C$. Also ist $\bar{L}_C \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{R})$. Da $\bar{L}_B$ nach (3.5) schwach abgeschlossen in einer Sylow 2-Untergruppe von $\bar{M}$ ist, folgt nun $\bar{L}_C \leqslant \bar{R}$. Das ist aber ein Widerspruch. Somit haben wir (1).

(2) $[\tilde{V}, \bar{t}_1] = 1$. Sei $[\tilde{V}, \bar{t}_1] \neq 1$. Dann ist $|[\bar{t}_1, \tilde{V}]| = q$. Weiter ist $[\tilde{V}, \bar{t}_1]$ nicht singulär. Also ist o. B. d. A. $\tilde{B}^{\bar{t}_1} = \tilde{A}$. Dann ist $((Q_A \cap W)^*)^{\bar{t}_1} = (Q_B \cap W)^*$. Da $|[\tilde{Q}, \bar{t}_1]| = q^4$ ist, folgt $|(Q_B \cap W)^*| \leqslant q^2$. Das liefert $n \leqslant 6$. Da $\bar{N} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist, folgt $n \geqslant 5$. Also ist $n = 6$ und $|\bar{L}_B| = q^5$. Weiter ist $|\bar{N}| = q^5$. Sei $\bar{s} \notin \bar{R}$ ein 2-Element in $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ mit $[\bar{R}, \bar{s}] \leqslant \bar{N}$. Dann folgt $[\bar{s}, \tilde{V}] = 1$. Ist $[\bar{s}, \tilde{W}] = 1$, so folgt mit (2.4) $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nun gibt es aber in $\bar{s}\bar{R}$ ein Element $\bar{s}_1$, das eine Untergruppe der Ordnung $(q + 1)^2$ in $\bar{R}$ zentralisiert. Der Normalisator dieser Gruppe in $\bar{R}\langle \bar{t}_1 \rangle$ ist zu $\mathbf{Z}(\bar{R}) \times \bar{X}$, wobei $\bar{X}$ ein Kranzprodukt $D_{2(q+1)} \wr Z_2$ ist, hierbei ist $D_{2(q+1)}$ eine Didergruppe der Ordnung $2(q + 1)$, isomorph. Es operiert $\bar{X}$ irreduzibel auf $\tilde{V}$ und W/V. Also ist $[\bar{s}_1, \tilde{W}] = \tilde{V}$. Wir können o. B. d. A. $[\bar{s}_1, \bar{t}_1] \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ annehmen. Dann operiert $\bar{s}_1$ auf

$[\tilde{W}, \tilde{t}_1]$. Es ist $|[\tilde{W}, \tilde{t}_1]| = q^3$ und $|[\tilde{W}, \tilde{t}_1] \cap \tilde{V}| = q$. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß $\bar{N}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))}(R/N)$ ist. Sei nun $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $[\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{h}}, \mathbf{Z}(\bar{R})] = 1$. Dann folgt wegen $q > 2$, daß $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{R} \neq 1$ ist. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen ist, folgt nun $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{h}} = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $\mathbf{Z}(\bar{R})$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Nach [21, Korollar 2] ist dann $\langle \mathbf{Z}(\bar{R}^{\bar{M}}) \rangle$ eine zentrale Erweiterung einer Gruppe ungerader Ordnung mit $A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24}, L_r(2^u), U_3(2^u), Sz(2^u), L_3(2^u), G_2(2^u), U_3(3)$, ${}^3D_4(2^u)$ oder J_2. Ist $L_r(2^u)$ nicht in $\langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$ involviert, so ist $\bar{R} \nleqslant \langle Z(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$. Nach (4.5) gibt es dann ein $\bar{X} \simeq L_2(q)$, $\bar{X} \leqslant \bar{R} \cap \mathbf{E}(\bar{M})$. Die Operation von $\bar{t}_1$ auf $\bar{R}$ liefert nun aber einen Widerspruch. Die Struktur von $\bar{R}$ liefert nun $\langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle \simeq L_2(q)$. Also ist $\bar{M} = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))\, \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \rangle$. Das widerspricht aber $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$. Somit haben wir (2).

(3) Sei $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{Z} = \bar{L}_B \cap \bar{L}_B{}^{\bar{h}} \neq 1$. Dann ist $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{Z} \neq 1$: Setze $\bar{L}_1 = \bar{L}_B{}^{\bar{h}}$. Sei weiter $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap Z = 1$. Dann ist $\bar{L}_B \neq \bar{L}_1$. Setze $\bar{X} = \langle \bar{L}_1, \bar{L}_B \rangle$ und $\bar{F} = \mathbf{O}_2(\bar{X})$. Mit (3.12) und (5.1) folgt, daß $\bar{X}/\bar{F}$ zu $\Omega^+(4, q)$ oder $L_2(q)$ isomorph ist, da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ ist.

Sei zunächst $\bar{X}/\bar{F} \simeq \Omega^+(4, q)$. Nach (3.12) ist nun $\bar{X} = \bar{R}_Z$. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$ ist, ist auch $\bar{L}_B \cap \bar{N}$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Somit ist $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{F}$ oder $\bar{L}_B \cap \bar{F} = (\bar{L}_B \cap \bar{N} \cap \bar{F})\bar{Z}$. Ist $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{F}$, so ist $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{V}_Z)$. Also ist $\widetilde{V \cap Q_B} = \widetilde{V_Z \cap Q_B}$. Nach (1) ist dann $\bar{R} = \bar{R}_Z$ und dann $\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{Z} \neq 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{Z} \cap \bar{L}_B \cap \bar{N} = 1$. Dann ist $\bar{Z}$ nicht stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Vertausche nun die Rollen von $\bar{Z}$ und $\mathbf{Z}(\bar{R})$.

Sei nun $\bar{X}/\bar{F} \simeq L_2(q)$. Es ist $\bar{L}_B/\bar{Z}$ eine TI-Menge in $\bar{X}/\bar{Z}$. Nun liefert [21, (2.4)] $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{F}$ oder $\mathbf{Z}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \bar{L}_B$.

Sei zuerst $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{F}$. Dann ist $[\tilde{B}^{\bar{h}}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Sei $\tilde{B}^{\bar{h}} \cap \widetilde{Q \cap Q_B} = 1$. Es ist $\bar{F} \leqslant \mathbf{N}(\tilde{B}) \cap \mathbf{N}(\tilde{B}^{\bar{h}})$. Somit ist $[\bar{F}, \langle \tilde{B}, \tilde{B}^{\bar{h}} \rangle] = 1$. Sei $\bar{y} \in \bar{L}_B - \bar{F}$. Dann ist $[[\tilde{B}^{\bar{h}}, \bar{y}], \bar{L}_B \cap \bar{F}] = 1$ nach dem 3-Untergruppenlemma. Nach (3.6) ist $[\bar{y}, \tilde{B}^{\bar{h}}] \leqslant \tilde{Q}_B$. Somit folgt $[\bar{L}_B, \tilde{B}^{\bar{h}}] = \tilde{B}$. Dann ist $(\widetilde{Q \cap Q_B})\tilde{B}^{\bar{h}} \leqslant \tilde{W}(\widetilde{Q \cap Q_B})$. Sei $\tilde{x} \in (\widetilde{Q \cap Q_B})\tilde{B}^{\bar{h}} - (\widetilde{Q \cap Q_B})$. Dann ist o. B. d. A. $\tilde{x} \in \tilde{W}$. Sei weiter $\tilde{x} \in \widetilde{Q \cap Q_A}$. Nun ist $[\tilde{x}, \bar{L}_B] = \tilde{B}$ und $[\tilde{x}, \bar{L}_A] = \tilde{A}$. Da $\bar{R} = \langle \bar{L}_A, \bar{L}_B \rangle$ ist, folgt $[\tilde{x}, \bar{R}] \leqslant \tilde{V}$. Da $\bar{R}$ auf $[\langle \tilde{V}, \tilde{x} \rangle, \bar{N}]$ operiert, folgt $[\tilde{x}, \bar{N}] = 1$. Dann ist aber $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) \neq \tilde{B}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\tilde{B}^{\bar{h}} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Also ist $\tilde{B}^{\bar{h}} \leqslant \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$. Nach (1) ist dann $\bar{X} \leqslant \bar{R}$. Das liefert $\mathbf{Z}(\bar{R}) \leqslant \bar{Z}$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $\bar{Z}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \bar{L}_B$. Sei $\tilde{V}_1 = \langle \tilde{B}_i, \tilde{B}_i \in \tilde{B}^{\bar{R}}, \bar{L}_{B_i} \cap \bar{L}_1 \neq 1 \rangle$. Man sieht nun leicht $\tilde{V}_1 = \tilde{V}$. Nach (3.5) ist somit $\tilde{B}^{\bar{h}} \leqslant \tilde{W}$. Somit ist $[\tilde{V}, \bar{Z}] \leqslant \widetilde{Q_B \cap Q_{B^h} \cap Q}$. Es folgt $[\tilde{V}, \bar{Z}, \bar{Z}] \leqslant \tilde{B} \cap \tilde{B}^{\bar{h}} = 1$. Das widerspricht aber $[\tilde{V}, \bar{Z}] = [\tilde{V}, \bar{L}_B]$. Somit ist (3) bewiesen.

(4) $\tilde V \cap \tilde V^{\bar g} = 1$. Sei $\tilde V \cap \tilde V^{\bar g} \neq 1$. Nach (1) ist $\tilde V \cap \tilde V^{\bar g}$ total nichtsingulär in $\tilde V$ und $\tilde V^{\bar g}$. Somit ist $|\tilde V \cap \tilde V^{\bar g}| \leqslant q^2$.

Sei zunächst $|\tilde V \cap \tilde V^{\bar g}| = q^2$. Nach (2) ist $\tilde V^{\bar g} \leqslant \tilde W$. Nach [7, Satz 4] gibt es ein $\rho \in \mathrm{Aut}(Q)$ mit $o(\rho) = q - 1$ und $[\mathbf{C}_{\mathrm{Aut}(Q)}(\mathbf{Z}(Q)), \rho] \leqslant \mathbf{O}_2(\mathrm{Aut}(Q))$. Es operiert ρ auf $\tilde V$, $\tilde V^{\bar g}$ und $\tilde W$. Also ist $|\tilde W : \widetilde{\mathbf{C}_W(V^g)}| = q^2$. Setze $\tilde V_0 = \tilde V \cap \tilde V^{\bar g}$. Die Definition des Skalarproduktes auf $\tilde V^{\bar g}$ liefert $[\tilde W, \bar t_1] \leqslant \tilde V_0{}^{\perp}$. Also ist $\tilde V^{\bar g} = \tilde V_0 \perp [\tilde W, \bar t_1]$. Nach (2) ist $[\bar R, \bar t_1] \leqslant \bar N$. Also normalisiert $\bar R$ die Gruppe $\tilde V[\tilde W, \bar t_1]$. Es ist $\tilde V[\tilde W, \bar t_1] \leqslant \widetilde{(W \cap Q_B)}\widetilde{(W \cap Q_A)}$. Also ist $|\tilde V^{\bar g} \cap \tilde V\widetilde{(W \cap Q_B)}| = q^3$. Das liefert $|\tilde V^{\bar g} \cap \widetilde{W \cap Q_B}| = q^2$. Also ist $\tilde V^{\bar g} \cap \widetilde{W \cap Q_B}$ nicht total nichtsingulär. Somit gibt es ein $\tilde\alpha \in \tilde V^{\bar g} \cap \widetilde{(Q_B \cap Q)}$, $\tilde\alpha \sim \tilde b \in \tilde B$ in $\bar M$. Mit [25, (2.18)] erhalten wir nun $\langle \bar L_B, \bar L_\alpha\rangle/\mathbf{O}_2(\langle \bar L_B, \bar L_\alpha\rangle) \cong L_2(q)$. Nach (3) ist $\bar L_B \cap \bar L_\alpha = 1$. Da $\bar t_1 \in \bar L_\alpha$ und $\bar L_B \cap \bar N$ stark abgeschlossen in $\bar L_B$ ist, folgt nun $[\bar L_B \cap \bar N, \bar t_1] = 1$. Also ist $[\bar N, \bar t_1] \leqslant \mathbf{Z}(\bar R)$. Es folgt nun $[\bar N, \bar t_1, \tilde W] = 1 = [\bar N, \tilde W, \bar t_1]$. Das 3-Untergruppenlemma liefert nun $[\tilde W, \bar t_1] \leqslant \mathbf{C}_{\tilde W}(\bar N) = \tilde V$. Das widerspricht aber $\tilde V_0 \cap [\tilde W, \bar t_1] = 1$.

Sei nun $|\tilde V \cap \tilde V^{\bar g}| = q$. Dann ist $|\tilde W : \widetilde{\mathbf{C}_W(V^g)}| = q^3$ und $|[\tilde W, \bar t_1]| = q^3$. Wie oben haben wir $[\tilde W, \bar t_1]^{\perp} \geqslant \tilde V_0$. Da $\tilde V_0$ nicht singulär ist, folgt $[\tilde W, \bar t_1] = \tilde V_0 \oplus \tilde U$, wobei $\tilde U$ total nicht singulär ist. O. B. d. A. ist $\tilde V_0 \subseteq \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}$. Es ist $\tilde W = \widetilde{(W \cap Q_A)}\widetilde{(W \cap Q_B)}$. Wir können $|[\widetilde{W \cap Q_B}, \bar t_1]| > q$ annehmen. Also ist $|[\tilde W, \bar t_1] \cap \widetilde{Q \cap Q_B}| > q$. Da $\tilde V_0 \leqslant [\tilde W, \bar t_1] \cap \widetilde{Q \cap Q_B}$ ist, folgt $[\tilde W, \bar t_1] \cap \widetilde{Q \cap Q_B} \neq \tilde U$. Somit gibt es wieder ein $\tilde\alpha \in \tilde V^{\bar g} \cap \widetilde{Q \cap Q_B}$ mit $\tilde\alpha \sim \tilde b \in \tilde B$ in $\bar M$. Wie oben folgt nun wieder $[\tilde W, \bar t_1] \leqslant \tilde V$. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir (4) bewiesen.

Wir zeigen nun, daß es ein solches $\bar t_1$ nicht gibt. Nach (4) ist $[\tilde V^{\bar g}, \mathbf{C}_{\bar L_B \cap \bar N}(\bar t_1)] \leqslant \tilde V \cap \tilde V^{\bar g} = 1$. Also ist $\mathbf{C}_{\bar L_B \cap \bar N}(\bar t_1) \leqslant \mathbf{C}_{\bar M}(\tilde V^{\bar g}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar M}(\bar L_B)$. Setze $\bar B_1 = (\bar L_B \cap \bar N)^{\bar g}$. Dann ist $\mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\mathbf{Z}(\bar R)^{\bar g}) = \mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\bar B_1)$ und $\mathbf{N}_{\bar B_1}(\mathbf{Z}(\bar R)) = \mathbf{N}_{\bar B_1}(\bar L_B \cap \bar N)$. Nach (3) ist dann $[\mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\bar B_1), \bar B_1] \leqslant \bar B_1 \cap \mathbf{N}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R)) = \mathbf{N}_{\bar B_1}(\bar L_B \cap \bar N)$. Setze nun $\bar Y = \langle \bar B_1, \bar L_B \cap \bar N\rangle$. Es ist $|\tilde V^{\bar g} \cap \tilde V\widetilde{(Q_B \cap W)}| = q^2$. Weiter ist $[\mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\mathbf{Z}(\bar R)^{\bar g}), \tilde V^{\bar g} \cap \tilde V\widetilde{(Q_B \cap W)}] \leqslant \tilde V^{\bar g} \cap \tilde V = 1$. Also ist $|\bar L_B \cap \bar N : \mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\mathbf{Z}(\bar R)| \geqslant q^2$. Nach (3) ist $\bar L_B \cap \bar N$ eine *TI*-Menge in $\bar Y$. Mit [21, (2.4)] erhalten wir nun $\bar Y/\mathbf{O}_2(\bar Y) \cong L_2(r)$ oder $Sz(r)$ mit $r = |\bar L_B \cap \bar N : \mathbf{N}_{\bar L_B \cap \bar N}(\mathbf{Z}(\bar R)^{\bar g})|$. Da $r > q$ ist, ist dann aber nach [21, (2.4)] $\mathbf{Z}(\bar R)$ nicht stark abgeschlossen in $\bar L_B$.

Somit haben wir, daß $\mathbf{Z}(\bar R)$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{C}_{\bar M}(\mathbf{Z}(\bar R))$ ist. Mit [20, Korollar B] erhalten wir dann einen Widerspruch.

(9.4) Lemma. *Es ist* $\mathbf{Z}(\bar R)$ *nicht stark abgeschlossen in* $\bar L_B \cap \bar N$ *bezüglich* $\bar M$.

Beweis. Sei $\mathbf{Z}(\bar R)$ stark abgeschlossen in $\bar L_B \cap \bar N$. Nach (9.3) gibt es ein

$\bar{x} \in \bar{L}_B - \bar{N}$ mit $\bar{x} \sim \bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$ in $\bar{M}$. Dann ist $|[\bar{x}, \tilde{Q}]| = q^4$. Also ist $[\tilde{W}, \bar{x}] \leqslant \tilde{V}$. Nach (9.2) ist dann $\bar{R} = \bar{R}_0 \times \bar{Y}$, $\bar{Y} \cong L_2(q)$ und $\bar{R}_0 = N\langle \bar{x}^{\bar{M}} \cap \bar{R}\rangle$. Sei $\bar{x} = \bar{s}^{\bar{h}}$. Setze $\bar{Z} = Z(\bar{R})^{\bar{h}}$. Dann ist $\bar{Z} \leqslant \bar{R}_0$. Die Operation von $\bar{R}_0$ auf $\bar{N}/\mathbf{Z}(\bar{R})$ liefert $\mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{Z}) = \bar{L}_B \cap \bar{N} = \mathbf{C}_{\bar{N}}(\bar{x})$. Setze $\bar{Z}_1 = \bar{L}_B \cap \bar{R}_0$. Dann ist $\bar{Z}_1 = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B\rangle$. Also ist $\bar{Z}_1$ stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Sei $\bar{Z}_2 = \bar{N}_B \cap \bar{N} \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{h}}$. Dann ist $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \bar{Z}_2| = q$. Es folgt $\bar{x}\mathbf{Z}(\bar{R}) \cap \bar{x}^{\bar{M}} = \{\bar{x}\}$ oder $\bar{x}\mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $|\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B| = q^{n-4} + 1$ oder $q^{n-3} + 1$. Da $\bar{N} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist, ist $n > 4$. Da W nicht abelsch ist, folgt sogar $n > 5$. Weiter ist $q > 2$. Nach [1] ist dann $2(n-4) \leqslant n - 2$. Also ist $n = 6$. Es ist $\bar{L}_B \cap \bar{Y} \neq 1$. Sei $\bar{u} \in (\bar{L}_B \cap \bar{Y})^{\#}$. Dann ist $(\bar{R}_0)^{\bar{g}} \leqslant \bar{R}_u$ für alle $\bar{g} \in \bar{M}$ mit $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \leqslant \bar{L}_B$. Da $|\bar{N}_u| > q$ ist, erhalten wir nun einen Widerspruch.

(9.5) SATZ. *Es ist* $\bar{R} = \bar{X} \times \bar{Y}$, $\bar{Y} \cong L_2(q)$ *und* $[\tilde{W}, \bar{X}] \leqslant \tilde{V}$.

Beweis. Angenommen falsch. Nach (9.2) ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \leqslant \bar{N}$. Nach (9.3) ist $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \neq \{\mathbf{Z}(\bar{R})\}$.

(1) $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$. Sei $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Dann ist $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \tilde{V}] = 1 = [\bar{L}_B \cap \bar{N}, \tilde{V}^{\bar{g}}]$. Also ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \leqslant \tilde{W}$. Es ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{Q}_B = \widetilde{V \cap Q_B}$. Weiter operiert $\bar{L}_B$ auf $\tilde{V}^{\bar{g}}\tilde{V}/\widetilde{V \cap Q_B}$. Die Struktur der orthogonalen Gruppe liefert nun $\mathbf{C}_{\tilde{V}\tilde{V}^{\bar{g}}}(\bar{L}_B) > \tilde{B}$ oder $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Also ist $[\tilde{W}, \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}}] = 1$. Nach (2.4) ist dann $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$.

(2) Sei $\bar{s} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist $[\bar{s}, \bar{N}] = \mathbf{Z}(\bar{R})$. Nach (3.11) ist $[\bar{s}, \bar{N}] \leqslant \mathbf{Z}(\bar{R})$. Sei $\bar{L} = \mathbf{C}_{\bar{L}_A \cap \bar{N}}(\bar{s})$. Dann operiert $\bar{L}$ auf $\tilde{V}^{\bar{g}}$. Wir können $\bar{g} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ annehmen. Dann ist $\tilde{B} \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$. Sei nun $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \in \tilde{V}^{\bar{g}}$ mit $\tilde{\alpha} \in \widetilde{Q_B \cap W}$, $\tilde{\beta} \in \widetilde{Q_A \cap W} - \tilde{V}$. Sei weiter $[\bar{s}, \bar{N}] \neq \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $[\tilde{\beta}, \bar{L}] \neq 1$. Nun liefert die Operation von $\bar{R}$ auf $\tilde{V}$ aber, daß $\langle \tilde{B}, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}\rangle = \langle \tilde{B}, [[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \bar{L}], \bar{L}_B]\rangle$. Da $\tilde{V} = \langle \tilde{B}, \widetilde{V \cap Q_A \cap Q_B}, \tilde{A}\rangle$ ist, folgt $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Das widerspricht aber der Wahl von $\tilde{\beta}$. Also ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \leqslant \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B})$. Da $\tilde{B} \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$ ist, ist $\tilde{V}^{\bar{g}} \nleqslant \widetilde{W \cap Q_B}$. Somit gibt es ein $\tilde{a} \in \tilde{A}^{\#}$ und ein $\tilde{\alpha} \in \widetilde{W \cap Q_B}$ mit $\tilde{a}\tilde{\alpha} \in \tilde{V}^{\bar{g}}$. Nun folgt wieder $\widetilde{V \cap Q_B} \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}}$. Somit ist $\widetilde{V \cap Q_B} = \tilde{V}^{\bar{g}} \cap \tilde{Q}_B$. Die Struktur von $\bar{R}^{\bar{g}}$ liefert nun $[\tilde{V}^{\bar{g}}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Da $\mathbf{C}_{\widetilde{W \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$ ist, ist $\tilde{V} = \tilde{V}^{\bar{g}}$. Dann ist aber $\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{g}} = \mathbf{Z}(\bar{R})$.

(3) Wähle $\bar{s}$ wie in (2). Dann ist $2 \leqslant |(\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} : \bar{L}_B \cap \bar{N}| \leqslant q$. Weiter operiert jedes $\bar{x} \in (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} - (\bar{L}_B \cap \bar{N})$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$. Sei $\bar{y} \in \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist $[\tilde{W}, \bar{y}] \leqslant \widetilde{V \cap Q_B}$. Also ist $[\tilde{W}(\widetilde{Q \cap Q_B}), \bar{y}] \leqslant \widetilde{V \cap Q_B}$. Somit ist $|\tilde{Q} : \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{y})| \leqslant q^6$. Nach (1) ist $(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} \neq \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Sei nun $\bar{x} \in (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} - (\bar{L}_B \cap \bar{N})$, $\bar{x}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$. Dann ist $\langle \tilde{A}, \tilde{A}^{\bar{x}}\rangle$ eine hyper-

bolische Ebene in $\tilde{V}$. Wende nun (9.1) auf das Paar $\{\tilde{A}, \tilde{A}^{\bar{x}}\}$ an. Das liefert $|[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{x}]| = (|\tilde{W}/\tilde{V}|)^{1/2}$. Es ist $|[\tilde{V}, \bar{x}]| = q^2 = |[\tilde{Q}/\tilde{W}, \bar{x}]|$. Also ist $n = 6$ und $|[\tilde{Q}, \bar{x}]| = q^6$. Setze $\bar{F} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B \rangle$. Nach (2) sind alle Elemente aus $\bar{F}^{\#}$ zu Elementen aus $\mathbf{Z}(\bar{R})$ konjugiert. Da $\mathbf{Z}(\bar{R})$ eine TI-Menge ist, folgt $|\mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B| = q + 1$. Weiter ist $|(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{M}} \cap \bar{L}_B| = q + 1$. Aber $|((\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}})^{\bar{R}} \cap \bar{L}_B| > q$. Das ist ein Widerspruch.

(4) Setze $\bar{B}_0 = (\bar{L}_B \cap \bar{N})(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$. Für $\bar{x} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ wähle $\bar{h}_x \in \bar{L}_A \cap \bar{N}$ mit $\bar{h}_x^{-1}\bar{s}\bar{h}_x = \bar{s}\bar{x}$. Dann ist $\bar{B}_0 \subseteq (\bar{L}_B \cap \bar{N}) \cup (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} \cup \bigcup_{\bar{x} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}} (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}\bar{h}_x}$. Nach (1) sind $\bar{L}_B \cap \bar{N}$, $(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$ und $(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}\bar{h}_x}$ paarweise verschieden. Da $\mathbf{Z}(\bar{R}) \subseteq (\bar{L}_B \cap \bar{N}) \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$, wird $(\bar{L}_B \cap \bar{N}) \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$ von $\bar{h}_x$ normalisiert. Also ist $(\bar{L}_B \cap \bar{N}) \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} = \bigcap_{\bar{x} \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}} (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}\bar{h}_x} \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N}) \cap (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$. Nun folgt leicht die Behauptung.

(5) $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}} = \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$ ist total singulär in $\tilde{V}$. Da $[\tilde{V}, \bar{s}] = 1$ ist, folgt $[V, V^g] = 1$. Sei $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| = q^3$. Dann ist $|\tilde{W} : \widetilde{\mathbf{C}_W(V^g)}| = q$. Also ist $[\tilde{W}, \bar{s}] = \tilde{B}$. Dann ist $[\widetilde{W \cap Q_A}, \bar{s}] = 1$. Da $\widetilde{W \cap Q_B} \leqslant \tilde{V}[\widetilde{W \cap Q_A}, \bar{L}_B]$ ist, folgt $[\widetilde{W \cap Q_B}, \bar{s}] = 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}| \leqslant q^2$. Da $[\tilde{V}, (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}] \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ ist, folgt nun mit (3) die Behauptung.

(6) Sei $\bar{S} \leqslant \bar{R}$, $|\bar{S}| = (q + 1)^2$. Dann kann man $\bar{S}$ so wählen, daß $(\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}} \cap (\mathbf{N}_{\bar{R}}(\bar{S}) - \mathbf{C}_{\bar{R}}(\bar{S})) \neq \varnothing$ ist.

Es gibt ein $\bar{x} \in (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\bar{g}}$ mit $[\bar{S}, \bar{x}] \leqslant \bar{S}\bar{N}$ aber $[\bar{S}, \bar{x}] \nleqslant \bar{N}$. Wähle nun $\bar{y} \in \bar{L}_B$ mit $[\bar{S}, \bar{y}] \leqslant \bar{S}\bar{N}$, so daß $\bar{x}\bar{y}$ vom Typ c_2 auf $\tilde{V}$ ist. Das ist nach (3) möglich. Setze nun $\bar{R}_1 = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{S}, \bar{N} \rangle$. Das Frattiniargument liefert $\bar{R}_1 = \bar{N}\mathbf{N}_{\bar{R}_1}(\bar{S})$. Setze $\bar{R}^* = \bar{R}/\mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\mathbf{C}_{\bar{N}^*}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*) = (\bar{L}_B \cap \bar{N})^*$. Weiter ist $\mathbf{N}_{\bar{R}_1^*}(\bar{S}) = \bar{S}^*(\mathbf{N}_{\bar{R}_1^*}(\bar{S}) \cap (\bar{N}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^*)$. Da $\mathbf{C}_{\bar{N}^*}(\bar{S}) = 1$ ist, ist $\mathbf{N}_{\bar{R}_1^*}(\bar{S}) \cap (\bar{N}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^*$ elementar abelsch. Dann ist $\mathbf{N}_{\bar{R}_1^*}(\bar{S}) \cap (\bar{N}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^* \leqslant \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^* \mathbf{C}_{\bar{N}^*}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*) \leqslant (\bar{L}_B \cap \bar{N})^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^* \leqslant \bar{L}_B^*$. Nun liefert (4) die Behauptung.

Wir sind nun in der Lage den Satz zu beweisen. Wähle $\bar{x}$ wie in (6). Da nach (3) $\bar{x}$ auf $\tilde{V}$ vom Typ a_2 ist, ist $|\mathbf{C}_{\bar{S}}(\bar{x})| = q + 1$. Es operiert $C_{\bar{S}}(\bar{x})$ fixpunktfrei auf $[\tilde{V}, \bar{x}] = \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$. Sei $\tilde{C} \leqslant \tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$, $\tilde{C} \sim \tilde{B}$ unter $\mathbf{C}_{\bar{S}}(\bar{x})$, $\tilde{B} \neq \tilde{C}$. Dann ist $\bar{x} \in \bar{L}_B \cap \bar{L}_C$. Vertausche nun die Rollen von $\tilde{V}$ und $\tilde{V}^{\bar{g}}$ in (5). Das liefert, daß $\tilde{V} \cap \tilde{V}^{\bar{g}}$ total singulär in $\tilde{V}^{\bar{g}}$ ist. Also ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_C \rangle \leqslant \bar{R}_s$. Dann ist $[\bar{x}, \tilde{W}^{\bar{g}}] \leqslant \tilde{V}^{\bar{g}} \cap \widetilde{(Q \cap Q_B \cap Q_C)} = \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$. Weiter ist $[\bar{x}, \tilde{W}^{\bar{g}}\widetilde{(Q \cap Q_B)}\widetilde{(Q \cap Q_C)}] \leqslant \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$. Da $|\tilde{Q} : \tilde{W}^{\bar{g}}\widetilde{(Q \cap Q_B)}\widetilde{(Q \cap Q_C)}| = q^2$ ist, ist $|[\bar{x}, \tilde{Q}]| \leqslant q^4$. Das liefert $[\bar{x}, \tilde{W}] \leqslant \tilde{V}$. Mit (9.2) erhalten wir nun die Behauptung.

(9.6) Lemma. *Sei $t \in \bar{t}$, $t \sim z$ in G und $B \subseteq Q_t$. Dann ist $\widetilde{Q \cap Q_t} \geqslant \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle \leqslant \tilde{V}$, wobei $\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$ total singulär in $\tilde{V}$ ist.*

Beweis. Sei zunächst $t\mathbf{Z}(Q) \cap t^Q \neq t\mathbf{Z}(Q)$. Sei $X = \langle r \mid r \in \mathbf{Z}(Q)$ und $t \sim tr$ in $Q \rangle$. Dann ist $X < \mathbf{Z}(Q)$. Setze $\hat{Q} = Q/X$. Sei nun $r \in R$ mit $[t, r] \in \mathbf{C}_{\hat{Q}}(t) -$

$[\hat{Q}, t]$. Es ist $[\hat{Q}, \hat{t}] = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\hat{Q}}(\hat{t}))$. Also gibt es ein $\hat{y} \in \mathbf{C}_{\hat{Q}}(\hat{t})$ mit $[t, r]^y = [t, r]z$ mit $z \in \widehat{\mathbf{Z}(Q)}^{\#}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $R = Q\mathbf{C}_R(tZ(Q))$. Weiter ist $Q\mathbf{C}_R(t)$ ein Normalteiler vom Index höchstens q in R. Somit deckt $\mathbf{C}_R(t)$ die Gruppe R/N. Da $B \subseteq Q_t$, folgt nun $\tilde{V} \subseteq \tilde{Q}_t$.

Sei nun $t^Q \cap t\mathbf{Z}(Q) = t\mathbf{Z}(Q)$. Setze $U = Q \cap Q_t \cap [Q, t]$. Nach (2.6) ist $\mathbf{Z}(Q) \cap Q_t = 1$. Also ist $Q \cap Q_t \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t))$. Also ist $| Q \cap Q_t : U | \leqslant q$. Weiter ist $\tilde{U} \leqslant \tilde{V}$. Sei die Aussage des Lemmas falsch. Dann folgt $| \tilde{U} | \leqslant q^3$ und $| \widetilde{Q \cap Q_t} | \leqslant q^4$.

Sei zunächst $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M} \nleqslant \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Gibt es eine Involution $\bar{x}$ in $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M}$, die vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ ist, so ist $[\tilde{V}, \bar{x}]$ total singulär. Da $[\tilde{V}, \overline{Q_B \cap Q_t \cap M}] \leqslant \widetilde{Q \cap Q_t \cap Q_B}$ ist das ein Widerspruch. Also gibt es in $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M}$ keine Involutionen vom Typ a_2. Wähle nun $\bar{x} \in \overline{Q_B \cap Q_t \cap M} - \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Anwendung von (9.1) auf das Paar $\tilde{B}$, $\tilde{B}^{\bar{x}}$ liefert $|[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{x}]| = (| \tilde{W}/\tilde{V} |)^{1/2}$. Es ist $[\mathbf{C}_Q(t), Q_B \cap Q_t \cap M] \leqslant Q \cap Q_t$. Weiter ist $| V(Q \cap Q_t) : V | \leqslant q$. Das liefert $| \tilde{V}[\widetilde{\mathbf{C}_Q(t)}, \overline{Q_B \cap Q_t \cap M}] : \tilde{V} | \leqslant q$. Da $| \tilde{W} : \widetilde{\mathbf{C}_Q(t)}| \leqslant q$ ist, folgt $| \tilde{W}/\tilde{V} | \leqslant q^4$. Somit ist $| \tilde{W}/\tilde{V} | = q^4$ und $n = 6$.

Sei nun $\bar{y} \in (\bar{Y} \cap \bar{L}_B)^{\#}$. Da $\bar{Y} \lhd \bar{R}_u$ für alle $\bar{u} \in \bar{L}_B \cap \bar{R}_0$, $\bar{u} \sim t \in \mathbf{Z}(\bar{R})^{\#}$ in $\bar{M}$, folgt nun mit (3.10), $\bar{R}_y/\bar{N}_y \cong SL_3(q)$. Sei $\bar{w} \in N_{\bar{Y}}(\bar{L}_B)$, $o(\bar{w}) = q - 1$. Dann ist $\mathbf{C}_{\bar{N}_y}(\bar{w}) = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{\bar{R}_y} \rangle$ von der Ordnung q^3. Setze $\bar{F} = \mathbf{C}_{\bar{N}_y}(\bar{w})$. Sei $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{F}^{\bar{h}} \cap \bar{F} \neq 1$. Wir können $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(\bar{R}))$ annehmen. Dann ist $\bar{h} \in \mathbf{N}(\bar{Y})$. Somit können wir $[\bar{h}, \bar{y}] = 1$ annehmen. Dann ist $\bar{F}^{\bar{h}} \lhd R_y$. Da $\bar{F} = \langle \mathbf{Z}(\bar{R})^{R_y} \rangle$ ist, folgt nun $\bar{F} = \bar{F}^{\bar{h}}$. Also ist $\bar{F}$ eine TI-Menge in $\bar{M}$. Sei nun $[\bar{F}, \bar{F}^{\bar{h}}] = 1$, $\bar{F} \neq \bar{F}^{\bar{h}}$, für ein $\bar{h} \in \bar{M}$. Dann ist $\bar{F}^{\bar{h}} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$. Somit können wir $[\bar{Y}, \bar{F}^{\bar{h}}] = 1$ annehmen. Da $\bar{F}$ eine TI-Menge ist, folgt nun $[\bar{N}, \bar{F}^{\bar{h}}] = 1$. Das liefert $[\bar{R}_y, \bar{F}^{\bar{h}}] = 1$. Dann ist aber auch $[\bar{F}^{\bar{h}}, \bar{R}] = 1$. Das liefert nun $[\bar{F}^{\bar{h}}, \tilde{W}] = 1$. Nach (2.4) ist das aber nicht möglich. Also ist $\bar{F}$ schwach abgeschlossen in $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{F})$. Anwendung von [20, Korollar B] liefert, daß $\langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle$ eine zentrale Erweiterung einer Gruppe ungerader Ordnung durch $Sz(r)$, $U_3(r)$, $L_m(r)$, A_6, A_7, A_8, A_9, M_{22}, M_{23}, M_{24} ist. Da $|\bar{F}| \geqslant 64$ ist, ist $\langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle / \mathbf{O}(\langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle) \cong Sz(r)$, $U_3(r)$ oder $L_m(r)$. Da $SL_3(q)$ auf $\bar{F}$ operiert, folgt $\langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle \cong SL_4(q)$. Nun folgt $[\bar{Y}, \langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle] = 1$. Dann ist aber $\langle \bar{F}^{\bar{M}} \rangle$ in $\bar{R}_y$ enthalten. Das ist ein Widerspruch.

Somit ist $\overline{Q_B \cap Q_t \cap M} \leqslant \overline{L_B \cap N}$. Da $| Q_B \cap Q_t | = q^{n+1}$ und $| Q \cap Q_t \cap Q_B | < q^4$ ist, ist $| \overline{Q_B \cap Q_t \cap M} | \geqslant q^{n-4}$. Also ist $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \overline{Q_B \cap Q_t \cap M} | < q$. Weiter ist $Q_B \cap Q_t$ abelsch. Somit ist $\widetilde{Q \cap Q_t \cap Q_B} \leqslant \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$. Dann ist $Q \cap Q_t \cap Q_B \leqslant U$. Also ist $| Q \cap Q_t \cap Q_B | < q^3$. Das liefert nun aber $| \overline{Q_B \cap Q_t \cap M} | > q^{n-3}$. Das widerspricht $|\overline{L_B \cap N} | = q^{n-3}$.

(9.7) Satz. *Es ist* $\bar{Y} \trianglelefteq \mathbf{E}(\bar{M})$.

Beweis. Nach (9.5) ist $\bar{R} = \bar{X} \times \bar{Y}$ mit $[\tilde{W}/\tilde{V}, \bar{X}] = 1$. Setze $\bar{E} = \bar{L}_B \cap \bar{X}$. Dann ist $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{E}$. Weiter ist $|\bar{L}_B : \bar{E}| = q$.

(1) Für jedes $\bar{e} \in \bar{E}^{\#}$ ist $\bar{R}_e = \bar{E} \times \bar{Y}$ oder $\bar{R}_e/\bar{N}_e \cong \Omega^+(4, q)$. Weiter ist $\bar{Y} \lhd \bar{R}_e$. Es ist $\bar{E} \times \bar{Y} = \langle \bar{L}_B{}^{\bar{Y}} \rangle \leqslant \bar{R}_e$. Nach (3.10) ist $\bar{R}_e = \bar{E} \times \bar{Y}$ oder $\bar{R}_e/\bar{N}_e \cong \Omega^+(4, q)$. Sei also $\bar{R}_e/\bar{N}_e \cong \Omega^+(4, q)$. Es ist $\bar{Y} \leqslant \bar{R}_e$. Weiter ist $|\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{Y})| = q^{n-2}$. Somit gibt es in $\bar{N}_e\bar{Y}$ ein $\bar{Y}_1 \cong \bar{Y}$ mit $[\bar{N}_e, \bar{Y}_1] = 1$. Dann folgt aber $\bar{Y}_1 = \bar{Y}$. Also ist $\bar{Y} \lhd \bar{R}_e$.

(2) $\bar{E}$ ist stark abgeschlossen in $\bar{L}_B$. Sei $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ mit $\bar{E}^{\bar{h}} \neq \bar{E}$. Sei $\bar{e} \in \bar{E}^{\#}$ mit $\bar{f} = \bar{e}^{\bar{h}} \in \bar{E} \cap \bar{E}^{\bar{h}}$. Nach (1) ist $\langle \bar{R}_e, \bar{R}_f \rangle \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$. Also ist $\bar{E}^{\bar{h}} = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{Y}) = \bar{E}$. Das ist ein Widerspruch.

(3) $\bar{E}$ ist schwach abgeschlossen in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{E})$. Sei $\bar{F} \sim \bar{E}$ in $\bar{M}$, $\bar{F} \neq \bar{E}$ mit $[\bar{F}, \bar{E}] \leqslant \bar{F} \cap \bar{E}$. Ist $\bar{F} \cap \bar{E} \neq 1$, so ist nach (1), $\bar{F} \leqslant \bar{L}_B$. Dann ist nach (2) $\bar{F} = \bar{E}$. Also ist $[\bar{F}, \bar{E}] = 1$. Dann ist $\bar{F} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y})$. Sei $\mathrm{L}_1 = \mathbf{C}_{\bar{F}}(\bar{Y})$. Dann ist $\mathrm{L}_1 \neq 1$. Also ist $[\mathrm{L}_1, \bar{L}_B] = 1$. Das widerspricht aber [24, (3.12)].

(4) Setze $\bar{U} = \langle \bar{L}_B{}^{\bar{g}} \mid \bar{g} \in \bar{M}, \bar{Y} = \mathbf{E}(\bar{R}_e)$ für ein $1 \neq \bar{e} \in \bar{E}^{\bar{g}} \rangle$. Ist $\bar{L}_s \leqslant \bar{U}$ und $F \subseteq Q_s \cap B^M$, so ist $\bar{L}_F \leqslant \bar{U}$: Nach (1) können wir $\tilde{s} \in \tilde{B}$ annehmen. Sei $\bar{h} \in \bar{M}$ mit $\bar{L}_F = \bar{L}_B{}^{\bar{h}}$. Setze $\bar{F}_1 = \bar{E}^{\bar{h}}$. Ist $\bar{F}_1 \cap \bar{E} \neq 1$, so folgt (4) aus (1). Also können wir $\bar{F}_1 \cap \bar{E} = 1$ annehmen. Da $F \subseteq Q_B$ haben wir nach [25, (2.18)] $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_F \rangle/\mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, \bar{L}_F \rangle) \cong L_2(q)$. Mit (3) folgt $\langle \bar{E}, \bar{F}_1 \rangle/\mathbf{O}_2(\langle \bar{E}, \bar{F}_1 \rangle) \cong L_2(q)$. Nun folgt $|\bar{E} : \mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1)| = q = |\bar{F}_1 : \mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{E})|$ und $[\mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1), \mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{E})] = 1$. Mit (9.4) und dem Argument in (9.5)(2) erhalten wir ein $\bar{t}^{\bar{g}} \in \bar{L}_B \cap \bar{N} - \mathbf{Z}(\bar{R})$ mit $\bar{t}^{\bar{g}} \sim \bar{t}^{\bar{g}}\bar{u}$ für alle $\bar{u} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Da $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \bar{E}$ und $|\bar{E} : \mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1)| = q$ ist, ist ein Konjugiertes von $\bar{t}$ in $\mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1)$ enthalten. Also können wir $\bar{t} \in \mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1)$ annehmen. Da $\mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{E}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{L}_B)$ ist, folgt $\mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{E}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{L}_B \cap \bar{N})$. Nach [21, (2.4)] ist nun $\bar{L}_B \cap \bar{N} = \mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1)$. Somit ist $\bar{L}_B \cap \bar{N} \leqslant \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{F})$. Also ist $\tilde{F} \subseteq \mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B \cap \bar{N}) = \widetilde{V \cap Q_B}$. Es ist $\mathbf{N}_{\bar{F}_1}(\bar{E}) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{Y} \cap \bar{L}_B)$. Da $\mathbf{N}_{\bar{E}}(\bar{F}_1) > \mathbf{Z}(\bar{R})$ ist, liefert nun wieder [21], $\bar{L}_B \cap \bar{Y} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{L}_B}(\bar{L}_F)$. Die Operation von $\Omega^+(4, q)$ auf $\tilde{V}$ liefert, daß die Involutionen aus $\bar{L}_B \cap \bar{Y}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{V}$ sind. Somit ist $\mathbf{C}_{\tilde{V}}(\bar{L}_B \cap \bar{Y})$ singulär. Insbesondere ist $\tilde{F} \sim \tilde{B}$ in $\bar{R}$. Nun folgt aber $\bar{L}_F \leqslant \bar{R}$. Das widerspricht aber $\bar{E} \cap \bar{F}_1 = 1$.

(5) Es gibt ein $\tilde{U}_1 \leqslant \tilde{Q}$ mit:

(i) Ist $\tilde{u} \in \tilde{U}_1$, so ist $\tilde{u} \sim \tilde{b} \in \tilde{B}$.

(ii) Ist $\tilde{u} \in \tilde{U}_1{}^{\#}$, so ist $\bar{L}_u \leqslant \bar{U}$.

(iii) $|\tilde{U}_1| \geqslant q^3$.

Nach (9.4) gibt es ein $\bar{n} \in (\bar{L}_A \cap \bar{N})$, $\bar{n} \notin \mathbf{Z}(\bar{R})$, $\bar{n} \sim \bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Dann ist $\tilde{A} \subseteq \tilde{V}_n = [\tilde{Q}, \bar{n}]$. Sei $\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle = \langle \tilde{B}^{\bar{Y}} \rangle$ und $\langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle = \langle \tilde{A}^{\bar{Y}} \rangle$. Dann sind beide Räume total singulär. Nach (1) ist $\langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle \leqslant \widetilde{V \cap V_n}$. Weiter ist $\langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle$ total singulär in $\tilde{V}_n$. Somit ist $\langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle = \widetilde{V \cap V_n}$ oder $\tilde{V} = \tilde{V}_n$. Der zweite Fall liefert mit (2.4) den Widerspruch $\bar{n} \in \mathbf{Z}(\bar{R})$. Also ist $\langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle = \widetilde{V \cap V_n}$. Wir wählen die

Notation so, daß $\tilde{D} \leqslant \tilde{B}^{\perp}$, $\tilde{A} \leqslant \tilde{C}^{\perp}$ ist. Es ist $\tilde{V}_n = \langle \tilde{A}, \tilde{D} \rangle \oplus \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$, wobei $\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$ total singulär ist und von $\bar{Y}$ normalisiert wird. Weiter ist $\tilde{S} \leqslant \tilde{A}^{\perp}$ und $\tilde{T} \leqslant \tilde{D}^{\perp}$. Schließlich gibt es ein Konjugiertes $\bar{F}$ von $\bar{E}$ in $\bar{R}_n$, so daß $[\tilde{V}_n, \bar{F}] = \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$ ist.

Wähle nun ein $\bar{x} \in (\bar{L}_B \cap \bar{N})^{\#}$. Dann ist $[\bar{x}, \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle] = 1$ oder eine Untergruppe von $\widetilde{V \cap Q_B}$ von der Ordnung q^2, die von $\bar{Y}$ normalisiert wird. Im zweiten Fall folgt $[\bar{x}, \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle] = \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$. Sei $[\bar{x}, \tilde{S}] \cap \tilde{B} \neq 1$. Da $\tilde{S} \leqslant \widetilde{Q_A \cap Q}$ ist, folgt $\tilde{B} \cap \tilde{Q}_A \neq 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $[\tilde{T}, \bar{x}] = \tilde{B}$. Nun folgt mit [7], daß $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle)| \leqslant q$ ist. Wähle nun $\bar{e} \in \bar{E} - \bar{L}_B \cap \bar{N}$. Dann ist $[\bar{e}, \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle] = 1$ oder eine Untergruppe $\tilde{X}$ von $\widetilde{W \cap Q_B}$ von der Ordnung q^2, die von $\bar{Y}$ normalisiert wird. Setze $\bar{E}_0 = \langle \bar{e} \rangle \mathbf{C}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle)$. Dann ist $[\tilde{X}, \bar{E}_0] = 1$. Also ist $[\bar{E}_0, \tilde{X}\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle] = 1$. Es ist $\tilde{X}\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle \leqslant \widetilde{W \cap Q_B}$. Weiter ist $|\bar{L}_B : \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tilde{X}\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle)| < q^3$. Das liefert $\tilde{X} \cap \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle \neq 1$. Da $\tilde{X} \cap \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$ aber $\bar{Y}$-invariant ist, folgt nun $\tilde{X} = \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$. Somit haben wir $[\bar{E}, \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle] \leqslant \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$. Weiter ist $|\bar{E} : \mathbf{C}_{\bar{E}}(\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle)| \leqslant q^2$. Das gleiche Argument liefert $[\bar{F}, \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle] \leqslant \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$ und $|\bar{F} : \mathbf{C}_{\bar{F}}(\langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle)| \leqslant q^2$.

Setze nun $\bar{X}_1 = \langle \bar{E}, \bar{F} \rangle$. Dann ist nach (3) und (3.8) entweder $|\bar{E} : \mathbf{C}_{\bar{E}}(\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle)| = q$ oder $\bar{X}_1$ induziert $L_2(q^2)$ auf $\tilde{J} = \langle \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$. Da $[\bar{L}_B \cap \bar{N}, \tilde{T}] \leqslant \tilde{B}$ ist, folgt $\tilde{T} \leqslant \tilde{V}(\widetilde{W \cap Q_B})$.

Induziert $\bar{X}_1$ die Gruppe $L_2(q^2)$ auf $\tilde{J}$, so setze $\tilde{U}_1 = \langle \tilde{B}, \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$. Also können wir $|\bar{E} : \mathbf{C}_{\bar{E}}(\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle)| = q$ annehmen. Sei nun $\tilde{j} \in \tilde{T}$. Dann ist $\tilde{j} = \tilde{v}\tilde{w}$ mit $\tilde{v} \in \tilde{V}$ und $\tilde{w} \in \widetilde{W \cap Q_B}$. Sei $[\tilde{j}, \bar{L}_B \cap \bar{N}] = 1$. Dann ist $\tilde{j} \in \tilde{V}$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|\bar{L}_B \cap \bar{N} : \mathbf{C}_{\bar{L}_B \cap \bar{N}}(\tilde{T})| = q$. Somit gibt es ein $\bar{e} \in \bar{E} - \bar{L}_B \cap \bar{N}$ mit $[\bar{e}, \tilde{j}] = 1$. Es ist $\tilde{v}\tilde{w} = \tilde{j} = \tilde{j}^{\bar{e}} = \tilde{v}^{\bar{e}}\tilde{w}^{\bar{e}}$. Somit ist $\tilde{v}^{\bar{e}} \in \tilde{v}\tilde{B}$. Das liefert nun $\tilde{v} \in \widetilde{V \cap Q_B}$. Das ergibt $\tilde{T} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_B}$. Dann ist $\tilde{T} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_D \cap Q_B} \leqslant \tilde{V}$ nach (9.1). Das ist aber ein Widerspruch. Somit haben wir (5).

(6) Sei $\bar{L}_t \leqslant \bar{U}$ und $\bar{F} \in \bar{B}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}(s)$. Dann ist $\bar{L}_F \leqslant \bar{U}$: Wir können wieder $\bar{s} \in \bar{B}$ annehmen. Nach (5) gibt es ein D, so daß

(i) $D \sim B$ und alle Involutionen aus $\langle B, D \rangle$ zu Involutionen aus B in M konjugiert sind. Weiter ist $\mathbf{Z}(Q) \cap \langle B, D \rangle = 1$.

(ii) $\langle B, D \rangle \leqslant \mathbf{C}_Q(F)$.

(iii) $\bar{L}_C \leqslant \bar{U}$ für alle $C \subseteq \langle B, D \rangle \cap B^M$.

Ist $Q_F \cap \langle B, D \rangle \neq 1$, so folgt mit (4), daß $\bar{L}_F \leqslant \bar{U}$ ist. Also ist $Q_F \cap \langle B, D \rangle = 1$. Wähle $d \in D^{\#}$. Dann können wir annehmen, daß dQ_F in einer Untergruppe von $(Q \cap \mathbf{C}_G(F))Q_F/Q_F$ liegt, die $\bar{E}$ entspricht. Also ist nach (1) die Gruppe $\langle ((Q \cap \mathbf{C}_G(F))Q_F/Q_F)^{\mathbf{C}_G(F)} \cap \mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(F)/Q_F}(dQ_F) \rangle$ eine Erweiterung einer 2-Gruppe mit $L_2(q)$ oder $\Omega^+(4, q)$. Somit gibt es nach (5.7) und (9.6) ein $c \in (Q \cap Q_F \cap Q_d) - \mathbf{Z}(Q)$ mit $c \sim z \in \mathbf{Z}(Q)$ in G. Da $\bar{L}_d \leqslant \bar{U}$ ist, folgt mit (4), daß $\bar{L}_c \leqslant \bar{U}$ ist. Das liefert nun wieder mit (4) die Behauptung.

Wir können nun den Satz beweisen. Setze $\overline{M}_0 = \langle \bar{L}_B{}^{\overline{M}} \rangle$. Nach (6) ist dann $\overline{M}_0 \leqslant \overline{U}$. Dann ist $\overline{Y} \lhd \mathbf{E}(\overline{M}_0) \lhd \mathbf{E}(\overline{M})$.

(9.8) SATZ. *Die Voraussetzungen dieses Paragraphen sind nicht erfüllbar.*

Beweis. Nach (9.7) ist $\overline{Y} \trianglelefteq \mathbf{E}(\overline{M})$. Ist $\overline{Y} \ntriangleleft \overline{M}$, so ist $\mathbf{E}(\overline{M}) \cong L_2(q) \times L_2(q)$ oder $L_2(q) \times L_2(q) \times L_2(q)$. Das widerspricht aber der Struktur von $\bar{R}$. Also ist $\overline{Y} \lhd \overline{M}$. Setze $\overline{Y}_1 = \mathbf{C}_{\overline{M}}(\overline{Y})$. Dann ist $\overline{Y}_1 \lhd \overline{M}$. Sei $\bar{y} \in (\bar{L}_B \cap \overline{Y})^{\#}$. Dann ist $\bar{R}_y \cap \overline{Y}_1 \neq 1$. Da $\bar{R}_y \cap \overline{Y}_1 \lhd \overline{Y}_1$ ist, folgt $\mathbf{O}_2(\bar{R}_y \cap \overline{Y}_1) = 1$. Das liefert nun aber $\overline{N}_y \leqslant \overline{Y}$. Also ist $|\overline{N}_y| = q$. Das widerspricht den Voraussetzungen dieses Paragraphen.

10. DER FALL $R/N \cong SL_m(q)$

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß für alle $\bar{t} \in \bar{L}_B{}^{\#}$ stets $\bar{R}_t = \bar{L}_B$ oder $\bar{R}_t/\overline{N}_t \cong SL_m(q)$, für ein m, ist. Weiter gibt es ein $\bar{t}$ mit $\bar{R}_t/\overline{N}_t \cong SL_m(q)$. Wir wollen zeigen, daß diese Situation nicht vorkommen kann.

(10.1) LEMMA. *Es gibt ein $t \sim z \in \mathbf{Z}(Q)$, $t \in M - Q$ mit*

(1) $t \in Q_B$,

(2) $\bar{R}_t \neq \bar{L}_B$.

Beweis. Sei die Aussage falsch. Wähle ein $X \leqslant Q$ mit

(i) $X^{\#} \subseteq z^G$.

(ii) Sind $\alpha, \beta \in X^{\#}$, so ist $\beta \in Q_\alpha$.

(iii) $|X|$ ist maximal bezüglich (i) und (ii).

Klar ist, daß $|X| \geqslant q^3$ ist. Sei $\alpha \in X - \mathbf{Z}(Q)$, $\beta \in (Q \cap Q_\alpha) - X$ und $\beta \sim z$ in G. Ist $\beta \in Q_u$ für alle $u \in X^{\#}$, so ist $X\langle\beta\rangle > X$ und erfüllt (i) und (ii). Das widerspricht (iii). Also gibt es ein $u \in X^{\#}$ mit $\beta \notin Q_u$. Es ist $\beta \in \mathbf{C}(u) - Q_u$. Sei $g \in G$ mit $u^g = z$. Dann erfüllt β^g und $\mathbf{Z}(Q_\alpha)^g$ die Behauptung des Lemmas. Also können wir $z^G \cap Q \cap Q_\alpha \leqslant X$ für jedes $\alpha \in X - \mathbf{Z}(Q)$ annehmen. Insbesondere ist $X \cap X^g = X$ oder $\mathbf{Z}(Q)$ für jedes $g \in M$.

Setze $U = \langle Q_\alpha \mid \alpha \in X^{\#} \rangle$ und $K = \mathbf{C}_U(X)$. Es ist $Q_\alpha \leqslant \mathbf{N}(X)$ für alle $\alpha \in X^{\#}$. Somit folgt mit [19] $U/K \cong L_s(q)$, wobei $|X| = q^s$ ist. Es ist o. B. d. A. $B \subseteq X$.

Sei $\bar{L}_B \cap (\bar{L}_B)^{\bar{g}} \neq 1$ für ein $\bar{g} \in \overline{M}$. Dann ist $B^g \subseteq Q_B \cap Q$. Also ist $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\overline{M}}(X^g)$. Wegen $\mathbf{C}_{\bar{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$, folgt nun $X^g = X$. Da es ein $\bar{h} \in \overline{M}$ mit $X \cap X^{h} = \mathbf{Z}(Q)$ gibt, ist $\bar{L}_\alpha \cap \bar{L}_\beta = 1$ für alle $\alpha \in X - \mathbf{Z}(Q)$ und $\beta \in X^h - \mathbf{Z}(Q)$. Wir halten nun ein solches Paar α, β fest.

Sei $\bar{\sigma} \in \bar{L}_\alpha{}^{\#}$ und $\bar{\tau} \in \bar{L}_\beta{}^{\#}$ mit $o(\bar{\sigma}\bar{\tau}) = 2$. Dann ist $\bar{L}_\alpha \cap (\bar{L}_\alpha)^{\bar{\tau}} \neq 1$. Also ist $X = X^\tau$. Somit ist $\tau \in \mathbf{N}_M(X)$ und $\sigma \in \mathbf{N}_M(X^h)$. Sei $(\bar{L}_\alpha)^{\bar{\tau}} \neq \bar{L}_\alpha$. Dann ist

$\bar{R}_\sigma \neq \bar{L}_\alpha$. Die Anwendung von (5.5) liefert nun $[\bar{\sigma}, \tilde{Q}] \subseteq \bigcup_{\gamma \in X^\#} \widetilde{Q \cap Q_\gamma}$. Nun ist weiter $[\bar{\sigma}, \tilde{X}^h]$ in $\widetilde{\{\mathbf{Z}(Q)^G\}} \cap [\bar{\sigma}, \tilde{Q}]$ enthalten. Da aber $\mathbf{Z}(Q)^G \cap Q \cap Q_\gamma \subseteq X$, für $\gamma \in X^\#$, ist, folgt $[\bar{\sigma}, \tilde{X}^h] = 1$. Somit ist $\bar{\sigma} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_\gamma)$ für alle $\tilde{\gamma} \in (\tilde{X}^h)^\#$. Nach (3.6) ist $\alpha \in \mathbf{C}_Q(X^h)$. Dann ist $[\alpha, \tau] \in X \cap Q_\beta = \mathbf{Z}(Q)$. Dann ist aber $\bar{L}_\alpha = (\bar{L}_\alpha)^\tau$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\bar{\sigma} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_\beta)$ und $\bar{\tau} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_\alpha)$. Setze nun $\bar{E} = \mathbf{N}_{\bar{L}_\alpha}(\bar{L}_\beta)$ und $\bar{F} = \mathbf{N}_{\bar{L}_\beta}(\bar{L}_\alpha)$, $\bar{A} = \langle \bar{L}_\alpha, \bar{L}_\beta \rangle$. Wie in [21, (2.4)] folgt, daß $\bar{E}\bar{F}$ ein elementar abelscher Normalteiler von $\bar{A}$ ist.

Wir zeigen nun, daß $\bar{L}_\alpha(\bar{E}\bar{F})/\bar{E}\bar{F}$ eine TI-Menge in $\bar{A}/\bar{E}\bar{F}$ ist. Sei $\bar{a} \in \bar{L}_\alpha \cap (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}}\bar{E}\bar{F}$, $\bar{h} \in \bar{A}$, $\bar{a} \notin \bar{E}$. Dann ist $[\bar{a}, \bar{E}] = [\bar{a}, \bar{E}^{\bar{h}}] = 1$. Da $\mathbf{C}_{\bar{E}\bar{F}}(\bar{a}) = \bar{E}$ ist, folgt $\bar{E} = \bar{E}^{\bar{h}}$. Nach dem 3-Untergruppenlemma ist dann $[\bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}}, \bar{E}\bar{F}] = 1$. Es ist $\langle \bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}} \rangle \leqslant \bar{R}_{\bar{t}}$ für geeignetes $\bar{t}$. Dann folgt nun, daß $\langle \bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}} \rangle / \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}} \rangle)$ zu $SL_2(q)$ isomorph ist. Nun folgt $\langle \bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}} \rangle = (\bar{L}_\alpha \cap (\bar{L}_\alpha)^{\bar{h}})\mathbf{C}_{\langle \bar{L}_\alpha, (\bar{L}_\alpha) \rangle^{\bar{h}}}(\bar{E}\bar{F})$. Dann ist aber $\mathbf{C}_{\bar{L}_\alpha}(\bar{E}\bar{F}) > \bar{E}$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\bar{L}_\alpha(\bar{E}\bar{F})/\bar{E}\bar{F}$ eine TI-Menge in $\bar{A}/\bar{E}\bar{F}$.

Nach (3.8) ist $\bar{A}/\bar{E}\bar{F} \cong L_2(q)$ oder $L_2(q^2)$. Sei zunächst $\bar{A}/\bar{E}\bar{F} \cong L_2(q)$. Es ist $\tilde{U}_0 = \langle \tilde{\alpha}^{\bar{A}} \rangle$ der natürliche $\bar{A}$-Modul. Das widerspricht aber (3.4).

Also ist $\bar{A}/\bar{E}\bar{F} \cong L_2(q^2)$. Setze $\tilde{U}_0 = \langle \widetilde{\mathbf{Z}(Q_\alpha)}^{\bar{A}} \rangle$. Dann ist $|\tilde{U}_0| \geqslant q^4$. Es folgt $\tilde{U}_0 = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{E})$. Somit ist $|\tilde{U}_0| = q^4$. Es ist $\tilde{X} \cap \tilde{U}_0 = \widetilde{\mathbf{Z}(Q_\alpha)}$. Sei nun $\bar{\tau} \in \bar{A}$, $o(\bar{\tau}) = q + 1$, $\bar{\tau} \in \mathbf{N}(\bar{L}_\alpha)$. Dann operiert $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\bar{E}^\#$, da $\mathbf{C}_{\bar{E}\bar{F}}(\bar{x}) = \bar{E}$ für alle $\bar{x} \in \bar{L}_\alpha - \bar{E}$ ist. Also operiert $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_\alpha{}^\#$. Da $[\tau, \mathbf{Z}(Q_\alpha)] = 1$ ist, liefert die Struktur von Q_α, daß $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\widetilde{Q_\alpha \cap Q}/\widetilde{\mathbf{Z}(Q_\alpha)}$ operiert. Somit ist $|\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{\tau})| = q^2$. Weiter ist $C_{\widetilde{\mathbf{C}_Q(\mathbf{Z}(Q_\alpha))}}(\bar{\tau}) = \mathbf{Z}(Q_\alpha)$. Aber $[\mathbf{Z}(Q_\alpha), \mathbf{Z}(Q_\beta)] = 1$ nach (3.6). Das ist ein Widerspruch.

Wir haben somit gezeigt, daß für alle $\alpha \in X - \mathbf{Z}(Q)$, $\beta \in X^h - \mathbf{Z}(Q)$ und alle $\bar{\sigma} \in \bar{L}_\alpha{}^\#$ und $\bar{\tau} \in \bar{L}_\beta{}^\#$ stets $o(\bar{\sigma}\bar{\tau}) \neq 2$ ist. Setze nun $\bar{\mathscr{D}} = \{\bar{x} \mid \bar{x} \sim \bar{r} \in \bar{L}_B{}^\# \text{ in } \bar{M}\}$. Sei $\bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\overline{U \cap M}) = 1$. Es ist $\overline{U \cap M}/\bar{K} \cong SL_{s-1}(q)$. Weiter ist $\bar{L}_B\bar{K}/\bar{K}$ eine TI-Menge in $\overline{U \cap M}/\bar{K}$. Also ist $\bar{L}_B$ eine TI-Menge in $\overline{M \cap U}$. Da $\overline{U \cap M} \trianglelefteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{X})$ ist, folgt, daß $\bar{L}_B$ eine TI-Menge in $\bar{M}$ ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{O}_2(\overline{U \cap M}) \neq 1$. Sei $\bar{S} \in \mathscr{S}yl_2(\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B))$. Dann ist $\bar{S} \in \mathscr{S}yl_2(\bar{M})$. Weiter ist $\bar{S} \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{U \cap M})$. Also gibt es ein $1 \neq \bar{t} \in \mathbf{Z}(\bar{S}) \cap \mathbf{O}_2(\overline{U \cap M}) \cap \bar{L}_B$. Seien nun $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\mathscr{D}} \cap (\overline{U \cap M})$, $\bar{\alpha}^{\bar{h}} = \bar{\beta} \in \bar{S}$. Wir können $\bar{\alpha} \in \bar{L}_B$ annehmen. Dann ist $[t, \bar{\beta}] = 1$. Es ist $\bar{\beta} \in (\bar{L}_B)^{\bar{h}}$ und $o(\bar{t}\bar{\beta}) = 2$. Wie oben gezeigt, folgt nun $X = X^{\bar{h}}$. Also ist $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{U \cap M})$. Somit kontrolliert $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{U \cap M})$ die Fusion in $\bar{\mathscr{D}} \cap (\overline{U \cap M})$. Also ist $\bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) = \bar{t}^{\mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{U \cap M})} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$. Das liefert $\bar{t}^{\bar{M}} \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t}) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{O}_2(\overline{U \cap M}))$. Nun liefert ein Resultat von Shult [14] zusammen mit (4.5), daß $\mathbf{E}(\bar{M})$ ein zentrales Produkt von Gruppen vom Bendertyp ist. Da es aber ein $\bar{y} \in \bar{L}_B$ mit $R_y/N_y \cong SL_m(q)$ gibt, liefert das $\mathbf{E}(\bar{M}) \cong L_2(q) \times L_2(q)$ und $n = 3$. Das widerspricht aber (5.5).

Bezeichnungen. Wir bezeichnen im folgenden mit t eine Involution, die

(10.1) erfüllt. Weiter ist $\bar{R} = \bar{R}_t$, $\bar{N} = \bar{N}_t$ und $\tilde{V} = \tilde{V}_t$. Nach (5.7) ist $\tilde{V} \leqslant \widetilde{Q \cap Q_t}$.

(10.2) LEMMA. *Es ist* $R = Q\mathbf{C}_R(t)$.

Beweis. Nach (5.7) ist $t \in M \cap Q_\alpha$ für alle $\tilde{\alpha} \in \tilde{V}^\#$. Da $|Q \cap Q_\alpha| = q^{n+1}$ ist, folgt $|[t, Q \cap Q_\alpha]| = q$. Also ist $M \cap Q_\alpha = (Q \cap Q_\alpha)\mathbf{C}_{M \cap Q_\alpha}(t)$. Dann ist $L_\alpha = Q\mathbf{C}_{L_\alpha}(t)$. Da dies für alle $\tilde{\alpha} \in \tilde{V}^\#$ gilt, folgt die Behauptung.

(10.3) SATZ. *Gibt es ein s mit* $R_s/N_s \cong L_2(q)$, *so daß* (10.1) *erfüllt ist, so gibt es in sQ ein t, das* (10.1) *erfüllt, so daß* $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_t}$ *ist. Ist für alle t, die* (10.1) *erfüllen stets* $m \geqslant 3$, *so ist stets* $Q \cap Q_t = \tilde{V}$.

Beweis. Sei $\tilde{V} < \widetilde{Q \cap Q_t}$. Setze $\tilde{Q}_1 = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(t)$. Dann ist $[Q, t] = \mathbf{Z}(Q_1)$. Es ist $|Q_1 : \mathbf{C}_Q(t)| \leqslant q$. Setze $Z = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t)) \cap \mathbf{Z}(Q_1)$. Dann ist $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t)) : Z| \leqslant q$. Es ist $Q \cap Q_t \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t))$, da $\mathbf{Z}(Q) \cap Q_t = 1$ ist. Setze $Q_0 = Q \cap Q_t \cap Z$. Dann ist $|Q \cap Q_t : Q_0| \leqslant q$. Weiter ist $Q_0 \leqslant [Q, t]$. Sei $\alpha \in (Q \cap Q_t) - Q_0$. Dann ist $\alpha \notin \mathbf{Z}(Q_1)$. Sei nun $h \in Q_1 - \mathbf{C}_{Q_1}(\alpha)$. Dann ist $h \notin \mathbf{C}_Q(t)$, da sonst $\mathbf{Z}(Q) \leqslant Q \cap Q_t$ folgen würde. Wir haben somit

(1) $|Q \cap Q_t : (Q \cap Q_t) \cap [Q, t]| \leqslant q$. Ist weiter $\alpha \in Q \cap Q_t - (Q \cap Q_t) \cap [Q, t]$, so ist $[\mathbf{C}_{Q_1}(\alpha), t] = 1$ und $t\mathbf{Z}(Q) = \{t^{Q_1}\}$. Ist $Q_1 = \mathbf{C}_Q(t)$, so ist $Q \cap Q_t \leqslant [Q, t]$.

Wir zeigen nun

(2) $|\widetilde{Q \cap Q_t \cap [Q, t]} : \tilde{V}| \leqslant q^2$. Sei χ: $\tilde{Q} \to \tilde{Q}$ mit $\chi(\tilde{x}) = [\tilde{x}, \tilde{t}]$. Setze $\tilde{W} = \chi^{-1}(\widetilde{Q \cap Q_t \cap [Q, t]})$ und $\tilde{W}_1 = \chi^{-1}(\tilde{V})$. Sei $|\tilde{W} : \tilde{W}_1| > q^2$. Wähle $\alpha \in Q_0 - V$ und $x \in W$ mit $[t, \tilde{x}] = \tilde{\alpha}$. Ist $t \sim t\alpha$, so ist $\alpha \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^\#$, da $\alpha \sim \alpha t$ in Q_t. Dann ist aber $t \in Q_\alpha$. Das liefert $\alpha \in V$, ein Widerspruch. Somit gibt es ein $z \in \mathbf{Z}(Q)^\#$, so daß $t \sim t\alpha z$ ist. Wir können x stets so wählen, daß $[[x, \mathbf{Z}(Q_t)], x] = 1$ ist. Nun gibt es aber ein $y \in \mathbf{C}_W([x, \mathbf{Z}(Q_t)])$ mit $\tilde{\beta} = [\tilde{y}, t] \notin \widetilde{\tilde{V}[x, \mathbf{Z}(Q_t)]}$. Also gibt es ein $z_1 \in \mathbf{Z}(Q)$ mit $t^y = t\beta z_1$. Da $|\widetilde{\tilde{V}[x, \mathbf{Z}(Q_t)]}/\tilde{V}| = q$ ist, können wir $z_1 = z$ annehmen. Dann folgt aber $(t\alpha z)^y = t^y \alpha z = t\beta\alpha z = t\beta\alpha$. Das widerspricht aber $t \not\sim t\beta\alpha$. Somit ist (2) gezeigt.

(3) $\widetilde{Q \cap Q_t} \cap [\tilde{Q}, t] \leqslant \tilde{T} = \widetilde{[\mathbf{C}_Q(V), t]}$. Sei die Behauptung falsch. Wegen $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist $[\bar{R}, \tilde{Q}] = \tilde{Q}$. Also ist auch $[\tilde{U}, \bar{R}] = \tilde{U}$. Nach (5.5)(b) und (5.5)(c) induziert $\bar{L}_B/\bar{L}_B \cap \bar{N}$ Transvektionen über F_q auf $[\tilde{Q}, \tilde{t}]/[\bar{N}, [\tilde{Q}, \tilde{t}]]$. Nach (2.3) ist dann $[\bar{N}, [\tilde{Q}, \tilde{t}]] = \tilde{T}$. Nun haben wir nach Annahme, (5.5) und (10.2), daß $[\tilde{Q}, t] \leqslant \tilde{T}(\widetilde{Q \cap Q_t})$ ist. Also ist $[\tilde{Q}, \tilde{t}] \leqslant \widetilde{Q \cap Q_t}$. Nach (2) ist nun $|[\tilde{Q}, t] : \tilde{V}| \leqslant q^2$. Mit (5.5) erhalten wir so $|\tilde{V}| = q^2$ und $\tilde{T} = \tilde{V}$. Weiter ist $R/N \cong L_2(q)$. Sei nun $\alpha \in [Q, t] - V$. Dann ist wieder $t \not\sim t\alpha$. Also gibt es

ein $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$, so daß $t \sim t\alpha z$ ist. Nun gibt es ein $x \in \mathbf{C}_Q(V) - Q_1$ mit $c = [x, t] \in V \cap Q_t$ und $\alpha^x = \alpha z$. Dann ist $(t\alpha z)^x = tc\alpha$. Da $c\alpha \in Q \cap Q_t$ ist, ist $c\alpha \sim c\alpha t$. Also ist $c\alpha \in V$, ein Widerspruch. Somit haben wir (3).

(4) Für geeignetes t gibt es ein $\alpha \in Q \cap Q_t - V$ und ein $x \in [\mathbf{C}_Q(\alpha), t] - T$, so daß für alle $y \in (Q_t \cap V)x$ stets $\alpha y \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ in G und $\alpha \in Q_{\alpha y}$ gilt: Wähle zunächst α beliebig in $Q \cap Q_t - V$ und x beliebig in $[\mathbf{C}_Q(\alpha), t] - T$. Indem wir eventuell x um Elemente aus $\mathbf{Z}(Q)$ abändern können wir $t \sim tx$ annehmen. Also ist $\alpha \in Q_t \cap Q_{tx}$. Weiter ist $t \notin Q_{tx}$, da sonst $x \in Q_t$ wäre. Das liefert dann aber $x \in V \subseteq T$, ein Widerspruch.

Sei nun $\alpha \notin [Q_{tx}, t]$. Wende (1) auf Q_{tx} an. Das liefert eine Untergruppe X von Q_{tx} von der Ordnung q mit $\mathbf{C}_X(\alpha) = 1 = C_X(s)$ für alle $s \in \mathbf{Z}(Q_t)^{\#}$. Weiter ist $[X, \mathbf{Z}(Q_t)] = \mathbf{Z}(Q_{tx})$. Sei nun $h \in X^{\#}$. Dann gibt es ein $r \in \mathbf{Z}(Q_t)\alpha$ mit $r^h = r$. Wähle nun h so, daß $t^h = t(tx)$ ist. Also ist $\mathbf{Z}(Q_t)^h = \mathbf{Z}(Q_x)$. Somit ist $r \in Q_x$. Es ist $r = \alpha s$ mit $s \in \mathbf{Z}(Q_t)$. Dann ist $s \in L_x = Q(Q_x \cap M)$. Da $\bar{L}_x \leqslant \bar{R}_s = \bar{R}_t = \bar{R}$ ist, folgt $x \in V$, ein Widerspruch.

Somit haben wir $\alpha \in [Q_{tx}, t]$ gezeigt. Da $\alpha \not\sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$, folgt $t \not\sim t\alpha$ in Q_{tx}. Sei nun $w \in \mathbf{C}_Q(B)$ mit $t^w = tx$. Dann ist $\mathbf{Z}(Q_{tx}) = \mathbf{Z}(Q_t)^w$. Also gibt es ein $s \in \mathbf{Z}(Q_t)$ und ein $u \in Q_{tx}$ mit $[t, u] = \alpha s^w$. Sei nun zunächst stets $m \geqslant 3$. Da $| Q \cap Q_t : Q \cap Q_t \cap Q_{tx} | \leqslant q$ ist, folgt, daß das Paar $\{Q_{tx}, t\}$ die Bedingungen von (10.1) erfüllt. Weiter ist $\alpha \notin \langle y \in Q_t \cap Q_{tx}, \ y \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ in $G\rangle$. Somit ist auch $\{Q_{tx}, t\}$ ein Gegenbeispiel zur Behauptung des Satzes. Somit gilt nach (1), daß entweder $t \sim ts^w$ in $\mathbf{C}_{Q_{tx}}(\alpha)$ oder $Q_t \cap Q_{tx} \leqslant [Q_{tx}, t]$ ist. Wegen $t \not\sim t\alpha$, folgt nun $Q_t \cap Q_{tx} \leqslant [Q_{tx}, t]$. Also können wir t so wählen, daß $Q \cap Q_t \leqslant T$ ist.

Sei nun $m = 2$. Ist $[u, B] = \mathbf{Z}(Q_{tx})$, so gibt es ein $b \in B^{\#}$ mit $b^u = bs^w$. Also ist $(tb)^u = t\alpha b$. Da $\alpha \in Q \cap Q_t$ und somit $t\alpha b \sim \alpha b$ ist, folgt nun $b\alpha \in V$, ein Widerspruch. Also ist $[B, u] = 1$. Sei zunächst $s = t$. Dann ist $\alpha x \sim t \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Da $u \in C(\alpha)$ ist, folgt auch $\alpha \in Q_{\alpha x}$. Das ist die Behauptung in (4). Also können wir $s \neq t$ annehmen. Die Operation von $\mathbf{Z}(Q_t)$ auf Q liefert nun, daß es ein $z \in \mathbf{Z}(Q)$ gibt, so daß $ts \sim ts\alpha z$ in $C_G(B)$ ist. Insbesondere ist $ts\alpha z \in Q_B$. Bei geeigneter Wahl von α folgt nun $\tilde{V} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_{ts\alpha z}}$. Anwendung von (1) liefert nun $Q \cap Q_{ts\alpha z} \leqslant T$ oder $ts\alpha z \sim ts\alpha$ in Q. Wegen $\alpha \notin V$ ist aber $ts\alpha z \not\sim ts\alpha$ in G. Ist $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_{ts\alpha z}}$, so haben wir die Behauptung des Satzes. Also können wir, indem wir t durch $ts\alpha z$ ersetzen $Q \cap Q_t \leqslant T$ annehmen.

Sei $C \subseteq V$, $x \notin Q_C$. Die Operation von R auf U, siehe (5.5), liefert $[\tilde{x}, \overline{L_C \cap N}]V/V = T/V$. Da $\alpha \not\sim \alpha t$ in G ist, folgt $[\tilde{x}, \overline{L_C \cap Q_t \cap N}] \leqslant \tilde{V}$. Es ist $[Q_C \cap Q_t \cap M, \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant Q \cap Q_t$. Nach (5.5) ist $[Q, t] = \mathbf{Z}(Q_1) \leqslant \mathbf{C}_Q(t)$. Das liefert $[Q, t, Q_C \cap Q_t \cap M] \leqslant Q \cap Q_t \leqslant T$. Nun folgt mit (5.5)(c) $\overline{Q_C \cap Q_t \cap M} \leqslant \overline{L_C \cap N}$. Da $| \bar{L}_B\bar{N}/\bar{N} | = q^{m-1}$ ist, liefert (3.5) $| \overline{L_C \cap N} | = q^{n-m}$. Weiter ist nach (3.5) $| Q_C \cap Q_t \cap M | = q^n$. Es ist $| Q_C \cap Q_t \cap Q | = q^m \, |(Q \cap Q_t)V/V |$. Also ist $| \overline{L_C \cap N} : \overline{Q_C \cap Q_t \cap M} | = | (Q \cap Q_t)V/V |$. Das liefert nun $[\tilde{x},$

$\overline{L_C \cap N}]V/V = (Q \cap Q_t)V/V$. Das liefert $\tilde{T} = \widetilde{Q \cap Q_t}$. Weiter ist nach (2), $|T/V| = q^2$, da $\bar{t}$ vom Typ a_r auf $\tilde{Q}$ ist. Setze nun $Y = \langle \mathbf{C}_Q(V \cap Q_t), \mathbf{C}_{Q_t}(V \cap Q_t)\rangle$. Dann operiert Y auf $\langle T, \mathbf{Z}(Q_t)\rangle/(V \cap Q_t) = T_1$. Beachte $V \cap Q_t = \langle a \mid a \in Q \cap Q_t, a \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ in $G\rangle$. Da $t \not\sim t\beta, \beta \in Q \cap Q_t - V$, folgt $|\mathbf{C}_Q(V \cap Q_t)/\mathbf{C}_Q(V \cap Q_t) \cap \mathbf{C}_Y(T_1)| = q^2$. Sei nun $c \in \mathbf{C}_Q(V \cap Q_t) - \mathbf{C}_Y(T_1)$, so ist $V/(V \cap Q_t) = \langle d \mid d \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}, d(Q_t \cap V) \in [T_1, c]\rangle$. Also ist $\mathbf{C}_Q(V \cap Q_t)/\mathbf{C}_Q(V \cap Q_t) \cap \mathbf{C}_Y(T_1)$ eine TI-Menge in $Y/\mathbf{C}_Y(T_1)$. Da $\mathbf{C}_{T_1}(\mathbf{C}_Q(V \cap Q_t)) = V/(V \cap Q_t)$ ist, folgt nun $\mathbf{O}_2(Y/\mathbf{C}_Y(T_1)) = 1$. Da $q \geqslant 4$ ist, liefert nun [20, Korollar B], daß $Y/\mathbf{C}_Y(T_1)$ eine Überlagerungsgruppe von $L_2(q^2)$ oder $L_3(q)$ ist. Die Operation von T_1 liefert nun $Y/\mathbf{C}_Y(T_1) \cong L_2(q^2)$. Also gibt es ein Element v in Y mit $o(v) = q + 1$ und $Q \cap Q_t = V \cap Q_t \times [Q \cap Q_t, v]$. Es folgt nun $[\tilde{U}, v] \leqslant \tilde{T}$. Wähle nun $\alpha \in [Q \cap Q_t, v]$ und $x \in \mathbf{C}_U(v)$. Die Struktur von Q liefert, daß es in $[Q \cap Q_t, v]$ eine Untergruppe A von der Ordnung q gibt, die α enthält und x zentralisiert. Also ist $A \leqslant [Q_{tx}, t]$. Sei $\beta \in A^{\#}$ mit $t \sim \beta x$ in Q_{tx}, so folgt $\beta x \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ in G. Nach Wahl von x ist dann auch $\alpha x \sim z \in \mathbf{Z}(Q)$. Also können wir annehmen, daß es ein $s \in \mathbf{Z}(Q_t)^{\#}$ gibt, so daß $t \sim r\alpha s^w \sim t\beta s^w$ in Q_{tx} ist. Die Operation von $\mathbf{Z}(Q_t)$ auf Q liefert nun, daß es ein $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ gibt, so daß $ts \sim ts\alpha z$ und $ts \sim ts\beta z$ in $\mathbf{C}_Q(\alpha)$ ist. Das liefert $ts \sim ts\alpha\beta$. Das widerspricht $\alpha\beta \notin V$. Somit ist (4) bewiesen.

Wir sind nun in der Lage das Lemma zu beweisen. Wähle t, α und x wie in (4). Nach (5.5) gibt es ein $b \in Q \cap Q_t \cap V$ mit $x \notin Q_b$. Sei $\alpha \in T$. Dann ist $\alpha \in Q_b$ nach (5.5). Also ist $\alpha x \notin Q_b$. Sei $\alpha \notin T$. Nach (3) ist dann $\alpha \notin [Q, t]$. Nach (1) ist $Q = \mathbf{C}_Q(\alpha)\,\mathbf{C}_Q([Q, t])$. Also ist $[Q, t] = [\mathbf{C}_Q(\alpha), t]$. Da $\alpha \in Q_t$ ist, folgt nun $\alpha \in Q_{tb}$, da $t \sim tb$ in $\mathbf{C}_Q(\alpha)$ ist. Aber $b \sim bt$ in $\mathbf{C}_{Q_t}(\alpha)$. Also ist $\alpha \in Q_b$. Insbesondere ist auch jetzt $x\alpha \notin Q_b$. Sei zunächst $\alpha \notin [Q_b, x\alpha]$. Wende (1) auf das Paar $\{Q_b, x\alpha\}$ an. Beachte, daß $\alpha \in Q_{x\alpha} \cap Q_b$ nach (4) ist. Nun folgt, daß es ein $h \in Q_b$ gibt, so daß $[\langle \alpha, \mathbf{Z}(Q_{x\alpha}), \mathbf{Z}(Q_b)\rangle, h] = \mathbf{Z}(Q_b)$, $[\alpha, h] \neq 1$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}(Q_{x\alpha})}(h) = 1$ ist. Somit gibt es ein $r \in \alpha\mathbf{Z}(Q_{x\alpha})$ mit $[r, h] = 1$. Also ist $r \in Q_{x\alpha b}$. Nach (5.5) ist $V \subseteq [\mathbf{C}_Q(\alpha), t]$. Also ist $xb \in [\mathbf{C}_Q(\alpha), t] - T$. Nach (4) ist $\alpha \in Q_{x\alpha b}$. Dann ist $r\alpha = \alpha s\alpha = s \in Q_{x\alpha b}$, für geeignetes $s \in \mathbf{Z}(Q_{x\alpha}) \subseteq Q_{x\alpha b}$. Nach (2.6) ist dann aber $b = x\alpha x\alpha b \subseteq Q_{x\alpha}$ und dann auch $x\alpha \in Q_b$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist $\alpha \in [Q_b, x\alpha]$. Sei $x\alpha \sim x = (x\alpha)\alpha$. Nach (4) ist $x \in Q_{\alpha x}$. Also ist $\alpha \sim x$ in $Q_{\alpha x}$. Das liefert nun $\alpha \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Da $t \in Q_\alpha$ ist, folgt nun der Widerspruch $\alpha \in V$. Also können wir $x\alpha \sim x\alpha(\alpha b)$ in Q_b annehmen. Nach (4) ist $\alpha(xb) \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ und $\alpha \in Q_{\alpha xb}$. Also ist $\alpha \sim \alpha(\alpha xb) = xb$. Dann ist aber wieder $\alpha \sim z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$, ein Widerspruch. Somit ist das Lemma bewiesen.

(10.4) Lemma. *Ist* $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_t}$, *so ist* $\bar{N} = \overline{Q_t \cap M}$.

Beweis. Sei $\tilde{C} \in \tilde{B}^{\bar{M}} \cap \tilde{V}$. Dann können wir $C \subseteq Q \cap Q_t$ annehmen. Es ist $[Q_C \cap Q_t \cap M, \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant Q \cap Q_t \leqslant V$. Nach (5.5) ist $[Q, t] = \mathbf{Z}(Q_1) \leqslant \mathbf{C}_Q(t)$. Das liefert $[Q, t, Q_C \cap Q_t \cap M] \leqslant V$. Nun folgt mit (5.5)(c) $\overline{Q_C \cap Q_t \cap M} \leqslant \overline{L_C \cap N}$. Da $|\bar{L}_B\bar{N}/\bar{N}| = q^{m-1}$ ist, liefert (3.5) $|\overline{L_C \cap N}| = q^{n-m}$. Weiter ist nach (3.5) $|Q_C \cap Q_t \cap M| = q^n$. Nach Annahme ist $|Q_C \cap Q_t \cap Q| = q^m$. Also ist $|\overline{Q_C \cap Q_t \cap M}| = q^{n-m}$. Das liefert $\overline{L_C \cap N} = \overline{Q_C \cap Q_t \cap M}$. Nach (3.11) ist nun $\bar{N} = \overline{Q_t \cap M}$.

(10.5) Lemma. *Es ist $\tilde{V} = \tilde{T}$.*

Beweis. Wähle t gemäß (10.3), d.h. $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_t}$. Es ist $T \leqslant [Q, t] \leqslant \mathbf{C}_Q(t)$. Somit ist $[[\tilde{Q}, t], \bar{N}] \leqslant \widetilde{Q \cap Q_t} = V$. Die Elemente aus $\bar{L}_B{}^{\#}$ induzieren Transvektionen über F_q auf U/V. Da R keine Untergruppe vom Index zwei in $\tilde{U}$ normalisiert. folgt mit (2.3) $[[\tilde{Q}, t], \bar{N}] = \tilde{T}$.

(10.6) Lemma. *Es erfülle t (10.3). Dann ist $t^Q \cap t\mathbf{Z}(Q) = \{t\}$. Ist weiter für alle t, die (10.1) erfüllen, stets $m \geqslant 3$ und $t \sim tz$, $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$, in G für ein t, so ist $n = 6$ und $m = 3$.*

Beweis. Nach (10.3) ist $Q \cap Q_t \leqslant V$. Also ist $(Q \cap Q_t)^{\#} \subseteq z^G$. Wir können $t \sim tz$ in Q, für $m = 2$ annehmen. Also ist dann auch $\widetilde{Q \cap Q_{tz}} = \tilde{V}$. Also ist dann $\langle \mathbf{Z}(Q), Z(Q_t)\rangle \leqslant Q_\alpha$ für jedes $\alpha \in Q \cap Q_{tz}$. Nun liefert (10.5) $Q_t \cap Q = Q_t \cap Q_{tz} = Q \cap Q_{tz}$. Also ist $[Q_t \cap M, Q_{tz} \cap M] \leqslant Q_t \cap Q_{tz} = Q_t \cap Q$. Das liefert $[\overline{Q_t \cap M}, \overline{Q_{tz} \cap M}] = 1$. Nach (10.4) ist dann $\bar{N} \leqslant \mathbf{Z}(\overline{Q_t \cap M})$. Also ist nach (10.3) $Q_t \cap Q_B \cap M/Q \cap Q_t \leqslant \mathbf{Z}(Q_t \cap M/Q \cap Q_t)$. Da $[Q_t \cap Q_B \cap M, Q_t \cap M] \leqslant \mathbf{Z}(Q_t)$ und $\mathbf{Z}(Q_t) \cap Q = 1$ ist, folgt nun $Q_t \cap Q_B \cap M \leqslant \mathbf{Z}(Q_t \cap M)$.

Vertausche nun die Rollen von z und t. Das liefert $Q_B \cap \mathbf{C}_Q(t) \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t))$. Da $t \in Q_B$ ist, folgt $|Q_B \cap \mathbf{C}_Q(t)| = q^n$. Es ist $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t)) : [Q, t]| \leqslant q$. Also ist $|Q_B \cap [Q, t]| \geqslant q^{n-1}$. Setze $Q_1 = \mathbf{C}_Q(t)$. Dann ist $Q_1 = \mathbf{C}_Q(t) = [Q, t]$ oder $|Q_1 : [Q, t]| = q^2$. Also ist stets $|\mathbf{C}_Q(t) : \mathbf{C}_Q(t) \cap Q_B| = q$. Per Symmetrie ist dann auch $|Q_t \cap M : Q_t \cap M \cap Q_B| = q$. Somit ist $|\overline{Q_t \cap M} : \overline{Q_t \cap M \cap Q_B}| \leqslant q$. Da $\bar{L}_B \cap \bar{N} = \overline{Q_t \cap M \cap Q_B}$ ist, folgt nun mit (10.4) $|\bar{N} : \bar{N} \cap \bar{L}_B| \leqslant q$.

Sei zunächst $m = 2$. Nach (10.5) ist dann $n \geqslant 5$. Ist $n = 5$, so ist $|Q_1/[Q, t]| = q^2$. Weiter operiert $\bar{R}$ nicht trivial auf $Q_1/[Q, t]$. Dann ist Q_1 abelsch von der Ordnung q^7, ein Widerspruch. Also ist $n = 4$ und $Q_1 = [Q, t] = \mathbf{C}_Q(t)$. Insbesondere ist $t^Q \cap t\mathbf{Z}(Q) = \{t\}$.

Sei nun stets $m \geqslant 3$. Es ist $|\overline{L_B \cap N} : \overline{L_B \cap L_a \cap N}| \leqslant q$, $\tilde{a} \in \tilde{V} - \tilde{B}$. Weiter ist $[\overline{L_B \cap L_a}, \overline{Q_B \cap Q_a \cap \mathbf{C}_Q(t)}] = 1$ und $|\widetilde{\mathbf{C}_Q(t) \cap Q_a \cap Q_B}| \geqslant q^{n-2}$. Die Struktur von Q_B liefert nun $|\overline{L_a \cap L_B}| \leqslant q^2$. Also ist $|\bar{N}| \leqslant q^4$. Somit ist $q^{n-1} = |L_B| \leqslant q^{m+3}$. Das liefert $n \leqslant m + 4$. Nach (5.5) ist aber $2m \leqslant n$. Also ist $m \leqslant 4$.

Sei $m = 4$. Dann ist $n = 8$. Weiter ist $\bar{N} = \overline{L_x \cap N}$ für alle $\tilde{x} \in \tilde{V}^{\#}$. Das liefert $[[\tilde{Q}, t], \bar{N}] = 1$ nach (5.5). Das widerspricht aber $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$.

Somit ist $m = 3$ und $|\overline{L_B \cap N}| = q^3$ und $|\bar{L}_B| = q^5$. Also ist $n = 6$. Wieder folgt $[Q, t] = Q_1 = \mathbf{C}_Q(t)$. Also ist $t^Q \cap t\mathbf{Z}(Q) = \{t\}$.

(10.7) Lemma. *Es ist $n = 6$ und $m = 3$.*

Beweis. Wähle t gemäß (10.3). Sei zunächst $m = 2$. Betrachte das Paar $\{Q_t, \mathbf{Z}(Q)\}$. Dann ist nach (10.2) $\mathbf{C}_Q(t)\langle Q_\alpha \cap \mathbf{C}_G(t), \alpha \in Q_t^{\#}$ und $\mathbf{Z}(Q)Q_t \subseteq (Q_\alpha \cap \mathbf{C}_G(t))Q_t\rangle/Q_t = \mathbf{C}_R(t)Q_t/Q_t$. Nach (10.6) ist $\mathbf{C}_{Q_t}(z)/\mathbf{Z}(Q_t) = \mathbf{C}_{Q_t\mathbf{Z}(Q_t)}(z)$. Also ist nach (10.4) und (5.5) $|Q_t : \mathbf{C}_{Q_t}(z)| = q^4$. Weiter operiert $\mathbf{C}_R(t)/\mathbf{C}_N(t)$ irreduzibel auf $[Q_t, z]/(Q \cap Q_t)\mathbf{Z}(Q_t)$. Es ist $[Q_t \cap M, \mathbf{C}_Q(t)] \leqslant Q \cap Q_t$. Wegen $[Q \cap Q_t, Q_t \cap M] = 1$, operiert $Q_t \cap M/(Q \cap Q_t)$ auf $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/(Q \cap Q_t)$, einer semiextraspeziellen Gruppe der Ordnung $q^{2(n-2)+1}$. Da $[\mathbf{Z}(Q_t), \mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)] = Q \cap Q_t$ ist, operiert $Q_t \cap M/(Q \cap Q_t)$ als elementar abelsche Gruppe auf $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/(Q \cap Q_t)$. Das liefert, daß ein Element $x \in (Q_t \cap M)/(Q \cap Q_t)$ auf $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/V$ entweder eine Involution vom Typ a_2 induziert oder $\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/V$ zentralisiert. Die Struktur von $O^{\pm}(2(n-2), q)$ liefert nun, daß $|Q_t \cap M : \mathbf{C}_{Q_t \cap M}(\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/V)| \leqslant q$ ist. Klar ist, daß $\mathbf{C}_{Q_t \cap M}(\mathbf{C}_Q(Q \cap Q_t)/V)$ elementar abelsch ist. Nun liefert die Struktur von $\mathbf{C}_Q(t)$, daß $n \leqslant 5$ ist. Sei $n = 5$. Da R/N treu auf $\mathbf{C}_Q(t)/U$ operiert, folgt nun, daß $\mathbf{C}_Q(t)$ elementar abelsch ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist $n = 4$. Dann ist $\bar{N} = \overline{Q_t \cap M}$. Weiter ist $\bar{N}/\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ der natürliche Modul für R/N. Da $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist, folgt $[\bar{N}, \tilde{U}] = \tilde{V}$. Insbesondere ist $\bar{R}/\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ zu einer Untergruppe von $Sp_4(q)$ isomorph. Da $q > 2$ ist, ist das ein Widerspruch.

Somit ist stets $m \geqslant 3$. Nach (10.3) ist $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_t}$. Sei $h \in Q - \mathbf{C}_Q(V)$ und $A = Q \cap Q_t \cap Q_{th}$. Dann ist $|Q \cap Q_t : A| = q$. Weiter ist $\mathbf{Z}(Q_t)^h \subseteq [Q, t]\mathbf{Z}(Q_t)$. Vertausche nun die Rollen von $\mathbf{Z}(Q)$ und $\mathbf{Z}(Q_t)$. Dann gibt es ein $Y \subseteq [Q_t, \mathbf{Z}(Q)]\mathbf{Z}(Q)$, $Y \sim \mathbf{Z}(Q)$ in G, so daß $C = Q \cap Q_t \cap Q_Y$ den Index q in $Q \cap Q_t$ hat. Weiter ist $Y \cap Q = 1$. Nun ist $\overline{[Q_t, \mathbf{Z}(Q)]} \leqslant \mathbf{Z}(\overline{Q_t \cap M})$, da $[Q, t] \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_Q(t))$ ist. Also ist $\bar{Y} \leqslant \mathbf{Z}(\bar{N})$ nach (10.4), da $Y \subseteq Q_a$ für alle $a \in C^{\#}$ ist. Nach (10.6) ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(t) = \widetilde{\mathbf{C}_Q(t)}$.

Sei nun $y \in Y^{\#}$. Es liefert (10.3) $\widetilde{[y, \mathbf{C}_Q(t)]} \subseteq \widetilde{Q \cap Q_t} = \tilde{V}$. Setze $W = \mathbf{C}_Q(t)\langle Q \cap Q_\beta \mid \beta \in C^{\#}\rangle$. Nun liefern (10.5) und (5.5) $|\mathbf{C}_Q(V) : W| = q$. Weiter ist $[W, y] \leqslant V$, da $[y, Q \cap Q_\beta] \leqslant \mathbf{Z}(Q_\beta)$ ist. Sei nun $\alpha \in (Q \cap Q_t) - C$. Nach (5.5) ist $\mathbf{C}_Q(V) = W(Q \cap Q_\alpha)$. Nun ist $[y, Q \cap Q_\alpha] \leqslant Q \cap Q_\alpha \bigcap_\gamma (Q \cap Q_\gamma)$, wobei γ über alle Elemente aus $C^{\#}$ läuft. Beachte $C^{\#} \subseteq z^G$, $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$. Da $\bar{y} \in \mathbf{Z}(\bar{N})$ ist, ist $\widetilde{[\mathbf{C}_Q(V), \bar{y}]}$ $\bar{N}$-invariant. Sei $\sigma \in [y, Q \cap Q_\alpha] - V$. Dann ist $[\bar{L}_\gamma, \tilde{\sigma}] = \widetilde{\mathbf{Z}(Q_\gamma)}$ für alle $\gamma \in C^{\#} \cup \{\alpha\}$. Also ist $\tilde{V} \subseteq [\tilde{\sigma}, \langle \bar{L}_\gamma \mid \gamma \in C^{\#}\rangle]$. Das liefert entweder (i) $[\mathbf{C}_Q(V), y] < V$ oder (ii) $V \leqslant [\mathbf{C}_Q(V), y]$.

Sei zunächst (i). Dann ist $|[\tilde{Q}, \bar{y}]| \leqslant q^{2m-1}$. Da $\bar{y} \in \bar{L}_\gamma$ für alle $\tilde{\gamma} \in \tilde{C}^{\#}$ und $|\tilde{C}| \geqslant q^2$ ist, folgt, daß $\bar{R}_y$ keine 2-Gruppe ist. Somit ist nach (10.5) und (5.5)

$|[\tilde{Q}, \bar{y}]| = q^{2r}$ für geeignetes r. Dann ist $|[\tilde{Q}, \bar{y}]| = q^{2m-2}$ und $\tilde{C} = \tilde{V}_y$. Nach (10.4) ist $\bar{N}_y \leqslant \overline{Q_y \cap M}$. Nach (10.5), (10.6) und (5.5) ist $\mathbf{C}_Q(y) = \mathbf{C}_Q([Q, y])$ und $\mathbf{C}_Q(V_y) = \mathbf{C}_Q(y)\langle Q \cap Q_\beta \mid \beta \in C^{\#}\rangle$. Also ist $[t, \mathbf{C}_Q(V_y)] \leqslant V_y$, da $\bar{t} \in \bar{N}_y$ ist und $[\bar{N}_y, \widetilde{\mathbf{C}_Q(y)}] \leqslant [\overline{Q_y \cap M}, \widetilde{\mathbf{C}_Q(y)}] \leqslant \widetilde{Q \cap Q_y} = \tilde{V}_y$ ist. Da $|\tilde{Q} : \widetilde{\mathbf{C}_Q(V_y)}| = q^{m-1}$ ist, folgt nun der Widerspruch $|[\tilde{Q}, \bar{t}]| \leqslant q^{2m-2}$.

Sei nun (ii). Dann ist $y \sim y\alpha$ oder $y \sim y\alpha z$ mit $z \in \mathbf{Z}(Q)^{\#}$ geeignet. Wende nun (10.6) auf y und Q_α bzw. y und $Q_{\alpha z}$ an. Das liefert $m = 3$ und $n = 6$.

(10.8) Lemma. *Die Voraussetzungen dieses Paragraphen sind nicht erfüllbar.*

Beweis. Angenomen doch. Nach (10.7) ist dann $R/N \cong SL_3(q)$. Da $\bar{N}_t \leqslant \overline{Q_t \cap M}$ ist, ist $\bar{N}_t$ elementar abelsch. Da $\tilde{V} = \widetilde{Q \cap Q_t}$ ist, folgt $|\bar{N}_t| = q^4$. Weiter ist $\bar{N}_t/\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ der natürliche Modul für R/N.

Sei $\bar{x} \in \bar{M}$ ein 2-Element mit $[\bar{x}, \bar{R}_t] = 1$. Dann ist $[\bar{x}, \tilde{U}] = 1$ und $\tilde{U} = [\tilde{Q}, \bar{x}]$. Weiter ist $[\tilde{B}, \bar{x}] = 1$. Also ist $[\widetilde{Q \cap Q_B}, \bar{x}] \leqslant \tilde{B}$. Ist $\bar{x} \notin \overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$, so gibt es nun in $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}\bar{x}$ ein Element $\bar{r}$ mit $[\bar{r}, \tilde{U}(\widetilde{Q \cap Q_B})] = 1$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)} = \mathbf{O}'(\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{R}_t))$. Die Struktur von $\mathrm{Aut}(Q)$ liefert nun $\bar{R}_t = \mathbf{O}'(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}))$, wobei $H = \mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$ ist.

Sei $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N}_t)$. Dann ist $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{V})$. Wir können $\bar{x} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{V})$ annehmen. Dann ist $\bar{x} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{R}_t) = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)})$. Also ist $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{N}_t) = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)})$. Sei nun $\bar{r} \in (\bar{N}_t\bar{L}_B/\bar{L}_B)^{\#}$. Dann ist $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)/\bar{L}_B}(\bar{r}) \leqslant \mathbf{N}_{\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)})/\bar{L}_B$. Sei nun $X \leqslant \mathbf{N}_{\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)})/\bar{L}_B$ mit $X \cong L_2(q)$. Sei weiter $Y = \mathbf{C}_{\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)/\bar{L}_B}(X)$. Es folgt, daß $\bar{N}_t\bar{L}_B/\bar{L}_B$ eine Sylow 2-Untergruppe von Y ist. Nun folgt, daß X eine Standarduntergruppe in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)/\bar{L}_B$ ist. Da $q > 2$ ist, folgt nun mit [6], daß $\langle X_{\mathbf{N}}\bar{M}^{(\bar{L}_B)/\bar{L}_B}\rangle = W$ zu X isomorph ist oder, daß $q = 4$ und $W \cong M_{12}$, J_2 oder A_9 ist.

Sei zunächst $q = 4$. Dann ist $R_t/N_t \cong SL_3(4)$. Also gibt es in $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$ ein Element τ von der Ordnung drei mit $|\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\tau)| = 2^6$. Es bewirkt τ auf W einen inneren Automorphismus, der X zentralisiert. Sei nun $W \neq X$. Da J_2 keine 10-dim. Darstellung über F_2 besitzt [4, (8.8)] und M_{12} keinen solchen Automorphismus zuläßt, folgt nun $W \cong A_9$. Dann ist $\mathbf{C}_W(\tau) \geqslant W_1 \cong A_6$. Da $Z_3 \times A_6$ keine Untergruppe von $GL_4(2)$ ist, folgt nun $[W_1, [\bar{\tau}, \bar{L}_B]] = 1$. Dann ist aber $|\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\omega)| = 2^6$ für jedes Element ω der Ordnung 5, $\omega \in W$. Das widerspricht aber der Operation von X auf $\bar{L}_B$.

Somit haben wir $W = X$ gezeigt. Da $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)} = \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(X)$ ist, folgt nun, daß $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ in $\bar{L}_B$ stark abgeschlossen bezüglich $\bar{M}$ ist. Es ist jede Involution aus $\bar{R}_t$ zu einer Involution aus $\bar{L}_B$ in $\bar{R}_t$ konjugiert. Also ist $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ stark abgeschlossen in $\bar{R}_t$ bezüglich $\bar{M}$. Da $\bar{R}_t = \mathbf{O}'(\mathbf{N}_{\bar{H}}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}))$ ist und $\overline{\mathbf{Z}(Q_t)}$ eine TI-Menge in $\bar{M}$ ist, folgt nun mit [14], daß $\langle \overline{\mathbf{Z}(Q_t)}^{\bar{M}}\rangle$ zu $L_2(q)$, $U_3(q)$ oder $Sz(q)$ isomorph ist.

Da $\bar{R}_t \cap \langle \overline{\mathbf{Z}(Q_t)}^{\bar{M}} \rangle \leqslant \bar{N}_t$ ist, folgt nun $\langle \overline{\mathbf{Z}(Q_t)}^{\bar{M}} \rangle \simeq L_2(q)$. Das Frattini-Argument liefert nun $\bar{M} = \langle \overline{\mathbf{Z}(Q_t)}^{\bar{M}} \rangle \, \mathbf{N}_{\bar{M}}(\overline{\mathbf{Z}(Q_t)})$. Das liefert aber den Widerspruch $\mathbf{O}_2(\bar{M}) \neq 1$. Damit ist das Lemma bewiesen.

11. Involutionen vom Typ a_2

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß es in $\bar{L}_B$ eine Involution $\bar{t}$ gibt, so daß $|[\tilde{Q}, \bar{t}]| = q^2$ und $[Q, \bar{t}]$ elementar abelsch ist. Wir sagen dann, daß $\bar{t}$ vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ ist. Weiter sei $\bar{\mathscr{E}} = \{\bar{\tau} \mid \bar{\tau} \sim \bar{x} \in \bar{L}_B \text{ in } \bar{M}, \bar{\tau} \text{ vom Typ } a_2 \text{ auf } \tilde{Q}\}$. Setze schließlich $\bar{X} = \langle \bar{\mathscr{E}} \rangle$. Weiter sei $n \geqslant 3$.

(11.1) Lemma. *Es gelten die folgenden Aussagen*:

(1) $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{B}) = \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$.

(2) $|\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))}(\bar{L}_B)|_{2'} \mid q-1$. *Weiter ist* $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))}(\bar{L}_B) \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{B})$ *eine* 2-*Gruppe.*

Beweis. (1) Klar ist $\mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{B}) \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Sei nun $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Wir wollen $\tilde{A} = \tilde{B}^{\bar{h}}$ annehmen. Dann ist $\bar{L}_B = \bar{L}_A$. Mit (2.5) erhalten wir nun $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$. Also ist $\tilde{A} \not\subseteq \tilde{Q}_B$. Dann ist $[\bar{L}_B, \widetilde{Q \cap Q_A \cap Q_B}] \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B} = 1$. Somit ist $\widetilde{Q_A \cap Q_B \cap Q} = 1$. Nun folgt $[\bar{L}_B, \widetilde{\mathbf{N}_Q(A)} \cap \widetilde{\mathbf{N}_Q(B)}] \subseteq \widetilde{Q \cap Q_A \cap Q_B} = 1$. Somit zentralisiert $\bar{L}_B$ in $\widetilde{\mathbf{N}_Q(B)}$ eine Untergruppe vom Index q. Die Struktur von Aut(Q), siehe [7], liefert nun $|\bar{L}_B| \leqslant q$. Aber $|\bar{L}_B| \geqslant q^{n-1}$. Das widerspricht nun $n \geqslant 3$.

(2) Sei $\bar{h} \in \mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))}(\bar{L}_B)$, $o(\bar{h})$ ungerade. Nach (1) ist $\bar{h} \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{B})$. Sei zunächst $\bar{h} \in \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{B})$. Wähle $h \in \bar{h}$, $o(h)$ ungerade, $h \in \mathbf{C}_G(B)$. Dann ist $h \in \mathbf{N}_{\bar{M}}(Q \cap Q_B)$. Weiter ist $[Q_B \cap M, h] \subseteq Q \cap Q_B$. Da $[h, \mathbf{Z}(Q)] = 1$ ist, folgt nun $[Q_B, h] \subseteq Q \cap Q_B$. Da $Q \cap Q_B$ abelsch ist und $[h, B] = 1$ ist, folgt nun $[Q \cap Q_B, h] = 1$. Also ist $[h, Q_B] = 1$. Somit ist gezeigt, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))}(\bar{L}_B) \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\tilde{B})$ eine 2-Gruppe ist. Da nach [25, (2.18)]$\langle Q, Q_B \rangle / \mathbf{O}_2(\langle Q, Q_B \rangle)$ zu $L_2(q)$ isomorph ist, folgt nun die Behauptung.

(11.2) Lemma. *$\bar{\mathscr{E}}$ ist eine Konjugiertenklasse von $\bar{X}$. Sind $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \bar{\mathscr{E}}$, so ist $o(\bar{e}_1 \bar{e}_2) = 2, 4$ oder ungerade. Ist $o(\bar{e}_1 \bar{e}_2) = 4$, so ist $(\bar{e}_1 \bar{e}_2)^2 \in \bar{\mathscr{E}}$.*

Beweis. Sei $\bar{\mathscr{D}} = \{\bar{x} \in \bar{M} \mid \bar{x} \text{ vom Typ } a_2 \text{ auf } \tilde{Q}\}$. Sind $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in \bar{\mathscr{D}}$, so ist nach [5, 23], $o(\bar{d}_1 \bar{d}_2) = 2, 4$ oder ungerade. Ist $o(\bar{d}_1 \bar{d}_2) = 4$, so ist $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)^2 \in \bar{\mathscr{D}}$. Da $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$ ist, folgt mit [22, (4.15)], daß $\bar{\mathscr{D}} = \bigcup_{i=1}^{r} \bar{\mathscr{D}}_i$, wobei die $\bar{\mathscr{D}}_i$ Konjugiertenklassen von $\langle \bar{\mathscr{D}}_i \rangle$ sind. Da $\bar{\mathscr{E}}$ eine normale Teilmenge von $\bar{M}$ ist, folgt $\bar{\mathscr{E}} = \bigcup_{i=1}^{r} \bar{\mathscr{D}}_i$, $s \leqslant r$. Also bleibt nur $s = 1$ zu zeigen.

Sei $s > 1$. Sei weiter $\bar{t} \in \bar{\mathscr{D}}_1 \cap \bar{L}_B$. Setze $\bar{F} = \langle \bar{\mathscr{E}} - \bar{\mathscr{D}}_1 \rangle$ und $\bar{K} = \mathbf{C}_{\bar{F}}([\tilde{Q}, \bar{t}])$. Da $[\tilde{Q}, \bar{t}]$ ein 2-dim. F_q-Modul ist, folgt $\bar{F}/\bar{K} \lesssim L_2(q)$. Nach (11.1) ist $\bar{K} \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Also ist $\bar{L}_B \cap \bar{K} \trianglelefteq \bar{K}$. Da $\mathbf{O}_2(\bar{M}) = 1$ ist, folgt $\bar{K} \cap \bar{L}_B = 1$. Da $\bar{L}_B \subseteq \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{t})$, folgt $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{\mathscr{D}}_1)$. Also ist $\bar{L}_B \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{F})$. Dann ist $[\bar{L}_B, \bar{K}] \leqslant \bar{L}_B \cap \bar{K} = 1$. Nach (11.1)(2) ist nun $\bar{K}$ eine 2-Gruppe. Das liefert $\bar{K} = 1$. Somit ist $\bar{F} \lesssim L_2(q)$. Genauso folgt $\langle \bar{\mathscr{D}}_1 \rangle \lesssim L_2(q)$.

Es ist $\bar{X}\bar{L}_B = \bar{X} \times \mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{X})$. Also gibt es in $\bar{F}$ ein Element $\bar{h}$ mit $\bar{B}^{\bar{h}} \neq \bar{B}$. Nach [25, (2.18)] ist $\langle \bar{L}_B, \bar{L}_B\bar{h} \rangle / \mathbf{O}_2(\langle \bar{L}_B, (\bar{L}_B)^{\bar{h}} \rangle) \simeq L_2(q)$. Also ist $\bar{F} \simeq L_2(q)$. Genauso folgt $\langle \bar{\mathscr{D}}_1 \rangle \simeq L_2(q)$. Sei nun $\bar{y} \in \langle \bar{\mathscr{D}}_1 \rangle$, $o(\bar{y}) = q + 1$ und $\bar{y}^{\bar{t}} = \bar{y}^{-1}$. Dann folgt $|[\bar{y}, \tilde{Q}]| = q^4$. Weiter ist $Q = [Q, \bar{y}]\, \mathbf{C}_Q(\bar{y})$ mit $[[Q, \bar{y}], \mathbf{C}_Q(\bar{y})] = 1$. Weiter ist $\bar{t}$ vom Typ a_2 auf $[\tilde{Q}, \bar{y}]$. Sei nun $[\bar{F}, [\bar{y}, \tilde{Q}]] = 1$. Nach (11.1)(1) ist dann $[\bar{F}, \bar{L}_B] \leqslant \bar{L}_B$. Das ist ein Widerspruch. Also operiert $\bar{F}$ treu auf $[\bar{y}, \tilde{Q}]$. Somit haben wir $\bar{X} \simeq SO^+(4, q)$ mit natürlicher Operation auf $[\tilde{Q}, \bar{y}]$. Insbesondere ist $[\mathbf{C}_Q(\bar{y}), \bar{X}] = 1$. Es ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(\bar{y}) \cap Q_B}, \bar{L}_B] \leqslant \widetilde{\mathbf{C}_Q(\bar{y})} \cap \tilde{B} = 1$. Da $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B) = \tilde{B}$ ist, folgt nun $\widetilde{\mathbf{C}_Q(\bar{y}) \cap Q_B} = 1$. Also ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(\bar{y})}, \bar{L}_B] \leqslant \widetilde{\mathbf{C}_Q(\bar{y}) \cap Q_B} = 1$. Dann ist aber $\bar{L}_B$ eine Untergruppe von $O^+(4, q)$. Da $|\bar{L}_B| \geqslant q^{n-1}$ ist, folgt nun $n \leqslant 3$. Es ist $\widetilde{Q \cap Q_B} = \widetilde{[\bar{y}, \tilde{Q}] \cap Q_B}$ von der Ordnung q^2. Also ist $n \leqslant 2$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist das Lemma bewiesen.

(11.3) Lemma. *Setze* $\bar{M}_1 = \mathbf{C}_{\bar{M}}(\mathbf{Z}(Q))$. *Dann ist* $|\mathbf{O}(\bar{M}_1)| \mid q - 1$. *Weiter ist* $\mathbf{O}(\bar{M}_1) \leqslant \mathbf{N}_{\bar{M}}(\tilde{B})$.

Beweis. Sei $\bar{L} \subseteq \bar{L}_B$, $|\bar{L}_B : \bar{L}| = 2$ und $\bar{W} = \mathbf{C}_{\mathbf{O}(\bar{M}_1)}(\bar{L}) \neq 1$. Nach [25, (2.18)] operiert auf $\bar{L}_B$ ein Element der Ordnung $q - 1$ fixpunktfrei. Also enthält $\bar{L}$ eine Involution $\bar{x}$, die vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ ist. Also operiert $\bar{W}$ auf $[\bar{x}, \tilde{Q}]$. Sei $[\tilde{B}, \bar{W}] \nsubseteq \tilde{B}$. Dann folgt mit $q > 2$, daß $[\bar{L}, [\bar{x}, \tilde{Q}]] = 1$ ist. Nun folgt wieder leicht, daß $\bar{L}$ in $\mathbf{N}_Q(\widetilde{B})$ eine Untergruppe vom Index q zentralisiert. Also ist $|\bar{L}| \leqslant q$. Insbesondere ist $|\bar{L}_B| \leqslant 2q$. Das liefert nun mit $q > 2$, daß $n \leqslant 2$ ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist $[\tilde{B}, \bar{W}] \subseteq \tilde{B}$. Dann folgt $[\bar{W}, \bar{L}_B] \subseteq \bar{L}_B \cap \bar{W} = 1$. Also ist $\mathbf{O}(\bar{M}_1) \subseteq \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Nun folgt die Behauptung mit (11.1)(2).

(11.4) Lemma. *Es ist* $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X}) \lesssim GL_2(q)$.

Beweis. Sei $\bar{t} \in \bar{\mathscr{E}} \cap \bar{L}_B$. Setze $\bar{X}_1 = \mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})$ und $\bar{K} = \mathbf{C}_{\bar{X}_1}([\tilde{Q}, \bar{t}])$. Nach (11.1) ist $\bar{K} \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Da $\mathbf{O}_2(\bar{K}) = 1$ ist, folgt nun $\bar{K} \subseteq \mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{L}_B)$. Nach (11.1)(2) ist dann $\bar{K} = 1$. Also ist $\bar{X}_1 \lesssim GL_2(q)$.

(11.5) Lemma. *Es ist* $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$ *eine Chevalley- oder Steinberg-Gruppe über einem Körper der Charakteristik zwei verschieden von* ${}^2F_4(r)$.

Beweis. Nach [25, (2.18)] gibt es ein Element der Ordnung $q - 1$, das fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$ operiert. Da $q > 2$ ist, folgt somit $\bar{X} = \bar{X}'$. Nach [22] ist dann $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$ eine der Fischer-Gruppen, $O^{\pm,\pm}(m, 3)$, $O^{\pm,\pm}(m, 5)$, A_6, J_2 oder eine Chevalley- oder Steinberg-Gruppe über einem Körper der Charakteristik zwei verschieden von ${}^2F_4(r)$.

Sei $\bar{t} \in \mathscr{E} \cap \bar{L}_B$. Dann ist $[\bar{t}, \tilde{Q}]$ ein 2-dim. F_q-Modul. Ist $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$ keine Chevalley- oder Steinberg-Gruppe über einem Körper der Charakteristik zwei, A_6 oder J_2. Dann ist stets $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t})^{(\infty)}, [\tilde{Q}, \bar{t}]] = 1$. Also ist $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t})^{(\infty)} \subseteq \mathbf{N}_{\bar{M}}(\bar{L}_B)$. Nun erhalten wir mit (11.3) leicht einen Widerspruch.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$ zu A_6 oder J_2 isomorph. Im Fall von J_2, können wir $q = 4$ annehmen, da wir sonst wie oben einen Widerspruch erhalten. Weiter können wir annehmen, daß $\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t})/\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t}))$ treu auf $[\tilde{Q}, \bar{t}]$ operiert. Zusammen mit (11.3) erhalten wir nun, daß $|\bar{L}_B| \leqslant 32$ ist. Da $\bar{L}_B \cap \bar{X}$ in einer Sylow 2-Untergruppe von $\bar{X}$ normal ist, folgt nun $|\bar{L}_B \cap \bar{X}| = 4$. Da $\mathbf{C}_{\bar{X}C_{\bar{M}_1}(\bar{X})}(\bar{t})$ auf $[\tilde{Q}, \bar{t}]$ operiert, folgt nun, daß $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$ ist. Das liefert nun den Widerspruch $n \leqslant 2$. Also haben wir $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq A_6$. Dann ist $|\bar{L}_B \cap \bar{X}| = q = 4$. Weiter folgt, daß $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})$ die Gruppe A_5 involviert. Schließlich folgt $n = 3$. Aber in $SO^{\pm}(6, 4)$ gibt es keine Involution, deren Zentralisator die Gruppe A_6 invoviert. Somit ist das Lemma bewiesen.

(11.6) Lemma. *Sei* $\bar{d} \in \mathscr{E}$, $\bar{\tau} \in \bar{M}$, $\tau^d = \bar{\tau}^{-1}$, $o(\bar{\tau})$ *ungerade. Dann ist* $o(\bar{\tau}) \mid q^2 - 1$.

Beweis. Es ist $Q = [Q, \bar{\tau}]\, \mathbf{C}_Q(\tau)$ mit $[[Q, \tau], \mathbf{C}_Q(\tau)] = 1$. Da $|\tilde{Q} : \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{d})| = q^2$ ist, folgt $o(\bar{\tau}) \mid q^4 - 1$. Es ist $\langle \bar{\tau}, \bar{d} \rangle$ eine Untergruppe von $O^+(4, q)$. Das liefert die Behauptung.

(11.7) Lemma. *Es ist* $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq L_m(r)$, $Sp_{2m}(r)$ *oder* $\Omega^{\pm}(2m, r)$, $r = 2^x$.

Beweis. Angenommen die Aussage wäre falsch. Nach (11.5) ist dann $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq G_2(r)$, ${}^3D_4(t)$, $U_m(r)$, $m \geqslant 5$, $F_4(r)$, $E_6(r)$, $E_7(r)$, $E_8(r)$, ${}^2E_6(r)$, $Sz(r)$ oder $U_3(r)$. Sei zunächst $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \not\simeq G_2(r)$, $U_3(r)$ oder $Sz(r)$. Dann ist stets $[\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t}), [\tilde{Q}, \bar{t}]] = 1$, für $\bar{t} \in \mathscr{E} \cap \bar{L}_B$. Ist $\bar{L}_B \cap \bar{X} \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t}))$, so folgt $[\bar{L}_B, \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t})] = 1$. Das widerspricht aber (11.1)(2). Also ist $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq F_4(r)$. Weiter ist $|\bar{L}_B \cap \bar{X}| = r^7$. Mit [22, (2.1)] und (11.6) folgt $r \leqslant q$. Nach [25, (2.18)] gibt es ein Element der Ordnung $q - 1$, das fixpunktfrei auf $\bar{L}_B^{\#}$ operiert. Also enthält $\bar{L}_B \cap \bar{X}$ eine Untergruppe der Ordnung q, die nur zu $\bar{t}$ konjugierte Involutionen enthält. Das liefert $r = q$. Somit ist $|\bar{L}_B| \leqslant q^8$. Also ist $n \leqslant 9$. Nach [10] ist aber $n \geqslant 13$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq G_2(r)$, $Sz(r)$ oder $U_3(r)$.

Sei zunächst $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \simeq G_2(r)$. Dann folgt mit [22, (2.1)] und (11.6), daß $r \mid q$ ist. Insbesondere ist $|\bar{L}_B| = r^3 q \leqslant q^4$. Das liefert $n \leqslant 5$. Sei zunächst $r \neq q$. Dann ist $n = 3$. Weiter involviert $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X})$ die Gruppe $L_2(q)$. Sei $\bar{\imath}$ eine Involution in $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X})$. Dann ist $|[\bar{\imath}, \tilde{Q}]| \leqslant q^3$. Weiter ist $[\bar{\imath}, \tilde{Q}]$ ein F_q-Modul. Da $G_2(r) \nsubseteq SL(q)$ ist, folgt nun $[[\bar{\imath}, \tilde{Q}], \bar{X}] = 1$. Das liefert nun $|[\bar{\imath}, \tilde{Q}]| = q$. Da $\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}) \neq 1$ ist, können wir $\bar{\imath} \in \bar{L}_B$ annehmen. Da $[[\bar{t}, \tilde{Q}], \mathbf{C}_M(X)] \neq 1$ ist, ist $[\bar{\imath}, \tilde{Q}] = \tilde{B}$. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathrm{Aut}(Q)$. Also ist $r = q$.

Nach [10] ist $[\bar{X}, \tilde{Q}]/\mathbf{C}_{[\bar{X},\tilde{Q}]}(\bar{X})$ ein 6-dim. F_q-Modul. Da $\bar{X}$ auf $([\bar{X}, \tilde{Q}]/\mathbf{C}_{[\bar{X},\tilde{Q}]}(\bar{X}))^{\#}$ transitiv ist, folgt, daß $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})$ ungerade Ordnung hat. Insbesondere ist $n \leqslant 4$. Da $G_2(q) \nsubseteq O^{\pm}(6, q)$ ist, folgt $n = 4$. Nun ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \neq 1$. Sei $\tilde{r} \in \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X})$. Dann operiert $\bar{X}$ auf $\widetilde{\mathbf{C}_Q(r)}$. Also ist $[\tilde{Q}, \bar{X}] \subseteq \widetilde{\mathbf{C}_Q(r)}$. Da $[\tilde{Q}, \bar{X}]$ nicht abelsch sein kann, folgt, daß $\widetilde{\mathbf{C}_Q(r)} = [\tilde{Q}, \bar{X}]$ ist. Dann ist aber $E(\mathbf{C}_Q(r)) \lhd M$. Das widerspricht der Annahme, daß $\mathbf{Z}(Q)$ ein maximaler abelscher Normalteiler von M ist.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong U_3(r)$ oder $Sz(r)$. Nach (11.6) ist wieder $r \leqslant q$. Also ist $|\bar{L}_B| \leqslant 2rq \leqslant 2q^2$. Da $q > 2$ ist, folgt nun $n = 3$. Weiter ist $r = q$. Wähle nun $\bar{t} \in (\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}))^{\#}$. Dann ist $\tilde{B} \subseteq [\tilde{Q}, \bar{t}]$. Also ist $[\tilde{Q}, \bar{t}] \geqslant q^2$. Da weder $Sz(q)$ noch $U_3(q)$ in $SL_3(q)$ involviert sind, folgt nun $[[\bar{t}, \tilde{Q}], \bar{X}] = 1$. Das liefert dann den Widerspruch $[\tilde{Q}, \bar{X}] = 1$.

(11.8) Lemma. *Es ist* $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \ncong Sp_{2m}(r)$, $m \geqslant 2$.

Beweis. Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong Sp_{2m}(r)$. Es entspreche $\bar{t} \in \mathscr{E} \cap \bar{L}_B$ zunächst einer Transvektion in der natürlichen Darstellung von $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X})$. Nach [25, (2.18)] gibt es ein Element der Ordnung $q - 1$, das fixpunktfrei auf $\bar{L}_B^{\#}$ operiert. Also ist $r \geqslant q$. Ist $r \neq q$, so folgt mit [10], daß $r = q^2$ ist. Weiter ist $[\bar{X}, \tilde{Q}]/\mathbf{C}_{[\bar{X},\tilde{Q}]}(\bar{X})$ der natürliche $\bar{X}$-Modul. Da $[\bar{X}, \tilde{Q}]$ nicht abelsch ist, folgt nun, daß $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \neq 1$ ist. Das liefert aber einen abelschen Normalteiler von M, der von $\mathbf{Z}(Q)$ verschieden ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist $r = q$.

Es folgt $|\bar{L}_B| \leqslant q^{2m}$. Also ist $n \leqslant 2m + 1$. Weiter ist nach [10] $n \geqslant 2m$. Sei zunächst $n = 2m + 1$. Dann ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}) \neq 1$. Wähle nun $\bar{t} \in (\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}))^{\#}$. Dann ist $\tilde{B} \subseteq [\bar{t}, \tilde{Q}]$. Das liefert nun $|[\tilde{Q}, \bar{t}]| = q^n$. Weiter ist nach [10], $[\tilde{Q}, \bar{t}, \bar{X}]/\mathbf{C}_{[\tilde{Q},\bar{t},\bar{X}]}(\bar{X})$ der natürlich Modul. Sei $\tilde{V} \subseteq [\tilde{Q}, \bar{t}]$, so daß $\tilde{V}$ der natürliche $\bar{X}$-Modul ist. Dann ist $C_Q(V) > V$. Also ist $|[\widetilde{\mathbf{C}_Q(V)}, \bar{t}]| = q$. Somit folgt, daß $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \neq 1$ ist. Ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \cap [\tilde{Q}, \bar{X}] \neq 1$, so folgt wieder, daß $\mathbf{Z}([Q, \bar{X}]) \neq \mathbf{Z}(Q)$ ist. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \cap [\tilde{Q}, \bar{X}] = 1$. Da $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X})$ treu auf $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X})$ operiert, folgt nun, daß das volle Urbild Q_1 von $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X})$ abelsch ist, da $q > 2$ und $\mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X})$ transitiv auf $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X})^{\#}$ operiert. Aber $[Q_1, [Q, \bar{X}]] = 1$. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir $n = 2m$ gezeigt. Die Operation von $\bar{X}$ auf $\tilde{Q}$ liefert nun $|\widetilde{Q \cap Q_B}| = q^n$. Also ist $|\bar{L}_B| = q^{n-1} = q^{2m-1}$. Insbesondere ist $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$ oder $m = 2$.

Sei $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$. Nach [10] ist $\tilde{Q} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, wobei die $\tilde{V}_i$ die natürlichen $\bar{X}$-Moduln sind. Insbesondere ist $|\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B)| = q^2$. Das widerspricht der Struktur von Q_B.

Also ist $m = 2$. Weiter ist $\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X}) \neq 1$. Da $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})$ auf $[\bar{t}, \tilde{Q}]$ operiert, folgt nun, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{\bar{X}C_{\bar{M}_1}(\bar{X})}(t)}([\bar{t}, \tilde{Q}]) = \mathbf{C}_{\bar{X}}(\bar{t})$ ist. Dann folgt aber $|\bar{L}_B \cap \bar{X}| = q^3$. Das ist ein Widerspruch.

Somit haben wir, daß $\bar{t}$ in der natürlichen Darstellung vom Typ a_2 ist. Nach [22, (2.1)] und (11.6) ist $r \leqslant q$. Nach [25, (2.18)] gibt es ein Element τ, $o(\tau) = q - 1$, das auf einer Sylow 2-Untergruppe von $\overline{M}_1$ operiert, die $\bar{L}_B$ enthält. Weiter ist $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$. Da $\bar{X}$ von $\bar{\tau}$ normalisiert wird, folgt nun, daß $\bar{\tau}$ auf $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_{\tilde{X}}(\bar{t}))$ operiert. Also ist $r = q$. Nach [10] gibt es $X_1, X_2 \subseteq Q$, so daß $[\tilde{X}_1, \bar{X}] = 1$ und $\tilde{X}_2/\tilde{X}_1$ der natürliche $\bar{X}$-Modul ist, oder, daß $\bar{X} \cong Sp_6(q)$ und $\dim_{F_q} \tilde{X}_2/\tilde{X}_1 = 8$ ist. Sei zunächst der erste Fall. Dann ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X}) \cap [\bar{X}, \tilde{Q}] \neq 1$. Das liefert aber wieder $\mathbf{Z}([X, Q]) > \mathbf{Z}(Q)$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\bar{X} \cong Sp_6(q)$. Es folgt, daß $|\bar{L}_B \cap \bar{X}| = q^3$ oder q^6 ist. Wegen $[\bar{X}, \tilde{Q}] \subseteq \tilde{X}_2$, folgt nun, daß $\mathbf{C}_{\overline{M}_1}(\bar{X})$ ungerade Ordnung hat. Insbesondere ist $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$. Wir können $\tilde{X}_2 = [\bar{X}, \tilde{Q}]$ annehmen. Ist $\tilde{X}_1 \neq 1$, so erhalten wir wie oben einen Widerspruch. Also ist $\tilde{X}_1 = 1$. Sei zunächst $|\bar{L}_B| = q^3$. Dann ist $n = 4$. Also ist $\tilde{X}_2 = \tilde{Q}$. Dann folgt aber $[\widetilde{Q \cap Q_B}, \bar{L}_B] = 1$. Das widerspricht $|\widetilde{Q \cap Q_B}| = q^4$. Also ist $|\bar{L}_B| = q^6$. Da es ein Element $\bar{x} \in \bar{X}$, von ungerader Ordnung gibt, so daß $[\bar{x}, \tilde{X}_2] = \tilde{X}_2$ ist, folgt nun $Q = X_2\mathbf{C}_Q(X_2)$. Insbesondere ist $\widetilde{Q \cap Q_B} \cap \widetilde{\mathbf{C}_Q(X_2)} = 1$. Es ist $|\widetilde{Q \cap Q_B} \cap \tilde{X}_2| = q^4$. Somit ist $|\widetilde{Q \cap Q_B}| = q^4$. Also ist $|\bar{L}_B| = q^{2s+3} = q^6$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist das Lemma bewiesen.

(11.9) Lemma. *Sei $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong \Omega^{\pm}(2m, r)$, $m \geqslant 3$, $r = 2^x$. Dann ist $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong \Omega^{+}(6, q)$.*

Beweis. Nach [25, (2.18)] gibt es in $\overline{M}$ ein Element $\bar{\tau}$ von der Ordnung $q - 1$, das eine Sylow 2-Untergruppe $\bar{S}$ von $\overline{M}_1$ normalisiert, die $\bar{L}_B$ enthält. Weiter ist $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$. Dann normalisiert $\bar{\tau}$ auch $\bar{S} \cap \bar{X}$ und somit $\bar{L}_B \cap \mathbf{Z}(\bar{S} \cap \bar{X})$. Das liefert nun $r \geqslant q$. Nach (11.6) und [22, (2.1)] ist $r \leqslant q$. Also ist $r = q$. Nach [10] gibt es $X_1, X_2 \leqslant Q$, so daß $[\bar{X}, \tilde{X}_1] = 1$ und $\tilde{X}_2 = [\bar{X}, \tilde{Q}]$ ist. Weiter ist X_2/X_1 ein irreduzibler Modul von der F_q-Dimension $2m$ oder $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong \Omega^-(6, q)$ und $\dim_{F_q} X_2/X_1 = 8$.

Sei zunächst $\dim_{F_q} X_2/X_1 = 2m$. Sei zunächst $\tilde{X}_1 \neq 1$. Wähle $\tilde{r} \in \tilde{X}_1{}^{\#}$. Dann ist $X_2 \subseteq \mathbf{C}_Q(r)$. Das liefert $\mathbf{Z}(X_2) > \mathbf{Z}(Q)$. Das ist ein Widerspruch. Klar ist wieder $Q = X_2\mathbf{C}_Q(X_2)$. Weiter ist $|\mathbf{C}_{M_1}(\bar{X})|$ ungerade. Also ist $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$. Das liefert nun $Q_B \cap \mathbf{C}_Q(X_2) = \mathbf{Z}(Q)$. Die Operation von $\bar{X}$ auf $\tilde{X}_2$ liefert mit (11.1)(1), daß $\widetilde{Q_B \cap X_2} = \tilde{B}$ ist. Also ist $|Q_B \cap M| = q^{2m} = q^{2n}$. Das liefert nun $X_2 = Q$. Nach [7, Satz 5] gibt es aber keine solche Erweiterung von Q mit X.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong \Omega^-(6, q)$ und $\dim_{F_q} X_2/X_1 = 8$. Wieder folgt $\tilde{X}_1 = 1$ und $Q = X_2\mathbf{C}_Q(X_2)$. Weiter folgt $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$. Sei zunächst $|\bar{L}_B| > q^3$. Die Operation von $\bar{X}$ liefert nun $[\bar{L}_B, [\bar{L}_B, \tilde{Q}]] = 1$. Da $[\widetilde{\mathbf{C}_{X_2}(B), L_B}] \neq \tilde{B}$ ist, folgt nun der Widerspruch $\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B) \neq \tilde{B}$. Also ist $|\bar{L}_B| = q^3$ und $X_2 = Q$. Sei $\bar{S} \in \mathscr{Syl}_2(\bar{X})$, $\bar{L}_B \leqslant \bar{S}$. Sei weiter $\bar{S}_1 \leqslant \bar{S}$, $\bar{S}_1$ elementar abelsch von der

Ordnung q^4. Dann ist $|\mathbf{C}_{\tilde{X}_2}(\bar{S}_1)| = q^4$. Da $\bar{L}_B \trianglelefteq \bar{S}$ ist, folgt $|\bar{S}_1 \cap \bar{L}_B| \geqslant q^2$. Da es in $PSU_4(q)$ keine Untergruppe $\bar{Y}$ der Ordnung q^2 gibt, so daß alle Involutionen aus $\bar{Y}$ in $\bar{X}$ zu 2-zentralen Involutionen aus $\bar{X}$ konjugiert sind, gibt es in $\bar{S}_1 \cap \bar{L}_B$ eine Involution $\bar{y}$, die nicht vom Typ a_2 auf $\tilde{Q} = \tilde{X}_2$ ist. Nach [5, Sekt. 8] ist dann $\bar{y}$ vom Typ a_4. Also ist $|\widetilde{Q_B \cap \mathbf{C}_{X_2}(S_1)}| \geqslant q^3$. Das liefert nun, daß $|\mathbf{C}_{\widetilde{Q \cap Q_B}}(\bar{L}_B)| \geqslant q^2$ ist. Das ist ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

(11.10) Lemma. *Sei* $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong L_m(r)$, $r = 2^x$. *Dann ist* $\bar{X} \cong SL_n(q)$. *Weiter ist* $\bar{X} = \langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle$ *und* $\tilde{Q} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, *wobei* $\tilde{V}_1$ *der natürliche* $\bar{X}$-*Modul und* $\tilde{V}_2$ *sein dualer ist. Schließlich gibt es ein Element* $\bar{h} \in \bar{M}$ *mit* $\tilde{V}_1{}^{\bar{h}} = \tilde{V}_2$.

Beweis. Nach [25, (2.18)] gibt es in $\bar{M}$ ein Element $\bar{\tau}$ von der Ordnung $q - 1$, das eine Sylow 2-Untergruppe $\bar{S}$ von $\bar{M}_1$ normalisiert, die $\bar{L}_B$ enthält. Weiter ist $\bar{\tau}$ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$. Also normalisiert $\bar{\tau}$ auch $\bar{L}_B \cap \mathbf{Z}(\bar{S} \cap \bar{X})$. Das liefert nun $r \geqslant q$. Nach (11.6) und [22] ist $r \leqslant q$. Also ist $r = q$. Sei zunächst $m \geqslant 4$. Nach [10] gibt es dann $X_1, X_2, X_3, X_4 \subseteq Q$ mit $[\tilde{X}_1, \bar{X}] = 1$, $[\tilde{X}_3, \bar{X}] = \tilde{X}_2$, $[\tilde{Q}, \bar{X}] = \tilde{X}_4$. Weiter sind X_2/X_1 und X_4/X_3 irreduzible Moduln der Dimension m, oder $\bar{X} \cong L_4(q)$ und es gibt $X_1, X_2 \subseteq Q$, so daß $[\tilde{X}_1, \bar{X}] = 1$, $\tilde{X}_2 = [\tilde{Q}, \bar{X}]$ und X_2/X_1 der 6-dim. orthogonale $\bar{X}$-Modul ist.

Es sei zunächst der erste Fall. Sei $\tilde{X}_1 \neq 1$. Dann folgt wieder $\tilde{X}_4 \subseteq \widetilde{\mathbf{C}_Q(X_1)}$. Da $X_4 \lhd M$ ist, folgt nun ein Widerspruch zu der Annahme, daß $\mathbf{Z}(Q)$ ein maximaler abelscher Normalteiler ist. Also können wir $\tilde{X}_1 = 1$ annehmen. Weiter ist $\tilde{X}_2$ dual zu X_4/X_3. Das liefert nun insbesondere $\bar{L}_B \cap \mathbf{C}_{\bar{M}}(\bar{X}) = 1$. Somit ist $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$. Insbesondere ist $|\bar{L}_B| = q^{m-1} \geqslant q^{n-1}$. Das liefert nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong L_n(q)$. Weiter ist $\tilde{X}_4 = \tilde{Q}$ und $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_2$. Da $\mathbf{Z}(Q)$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\bar{M}$ ist, gibt es in $\bar{M}$ eine Element $\bar{x}$ mit $\tilde{X}_1{}^{\bar{x}} \neq \tilde{X}_1$. Also ist $\tilde{Q} = \tilde{X}_1 \oplus \tilde{X}_1{}^{\bar{x}}$. Da $\bar{X}$ auf $\tilde{X}_1$ treu operiert, folgt nun $\bar{X} \cong SL_n(q)$. Damit haben wir die Aussage des Lemmas.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong L_4(q)$ und $1 \leqslant \tilde{X}_1 < \tilde{X}_2 = [\bar{X}, \tilde{Q}] \leqslant \tilde{Q}$, wobei $\tilde{X}_2/\tilde{X}_1$ der orthogonale Modul ist. Es folgt wie üblich $\tilde{X}_1 = 1$. Wie in (11.9) folgt $\widetilde{Q \cap Q_B} = \widetilde{X_2 \cap Q_B}$. Die Operation von $\bar{X}$ auf $\tilde{X}_2$ liefert nun, da $q > 2$ ist, daß $\widetilde{Q_B \cap Q} = \tilde{B}$ ist. Dann folgt aber $|Q_B \cap M| = q^6$. Also ist $X_2 = Q$. Nach [7] existiert aber keine solche Erweiterung von Q mit $\bar{X}$.

Sei nun $\bar{X}/\mathbf{Z}(\bar{X}) \cong L_3(q)$. Mit [10] erhalten wir wieder, daß $\bar{L}_B \subseteq \bar{X}$ ist. Also ist $|\bar{L}_B| = q^2$ und somit $n = 3$. Nun folgt wie oben die Aussage des Lemmas.

Sei zuletzt $\bar{X} \cong L_2(q)$. Da $|\bar{L}_B| \geqslant q^2$ ist, folgt, daß $\mathbf{C}_{\bar{L}_B}(\bar{X}) \neq 1$ ist. Also involviert nach (11.4), $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})$ die Gruppe $L_2(q)$. Insbesondere ist $|\bar{L}_B| = q^2$ und $n = 3$. Setze $\bar{Y} = \mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\bar{X})^{(\infty)}$. Dann ist $\bar{Y} \cong L_2(q)$. Es operiert $\bar{Y}$ treu auf $[\bar{t}, \tilde{Q}]$ und auf $Q/\mathbf{C}_Q([\bar{t}, Q])$. Das liefert nun $[\bar{Y}, \widetilde{\mathbf{C}_Q([\bar{t}, \tilde{Q}])}] \leqslant [\bar{t}, \tilde{Q}]$. Also gibt es ein $\bar{\tau} \in \bar{Y}$, $o(\bar{\tau}) = q + 1$ mit $|\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{\tau})| = q^2$. Da $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{\tau}) \subseteq \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{t})$, folgt $[\bar{X}, \mathbf{C}_Q(\bar{\tau})]$

$= 1$. Somit ist $\mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{\tau}) = \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{X})$. Insbesondere ist dann $[\bar{Y}, \mathbf{C}_{\tilde{Q}}(\bar{\tau})] = 1$. Das liefert nun $Q = X_1\mathbf{C}_Q(X_1)$, wobei $\tilde{X}_1 = [\tilde{Q}, \bar{X}\bar{Y}]$ von der Ordnung q^4 ist. Weiter ist $[\widetilde{\mathbf{C}_Q(X_1)}, \bar{X}\bar{Y}] = 1$. Also ist $\widetilde{Q_B \cap \mathbf{C}_Q(X_1)} = 1$. Das liefert nun $|\widetilde{Q \cap Q_B}| \leqslant q^2$. Also ist $|Q_B \cap M| \leqslant q^5$. Das Widerspricht $|Q_B \cap M| = q^{2n}$. Somit ist das Lemma bewiesen.

(11.11) Satz. *Es enthalte $\bar{L}_B$ eine Involution, die vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ ist. Sei weiter $n \geqslant 3$. Dann ist $\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle \simeq SL_n(q)$. Weiter ist $\tilde{Q} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, wobei $\tilde{V}_1$ der natürliche $SL_n(q)$-Modul und $\tilde{V}_2$ sein dualer ist. Es ist $|\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle)| \mid q - 1$. Weiter ist $q - 1 \mid |\bar{M}/\bar{M}_1|$. Schließlich gibt es noch ein $\bar{x} \in \bar{M}$ mit $\tilde{V}_1{}^{\bar{x}} = \tilde{V}_2$.*

Beweis. Nach (11.7)—(11.10) und [25, (2.18)] bleibt nur die Aussage über $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle)$ übrig zu beweisen. Da aber $\mathbf{C}_{\bar{M}_1}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle)$ treu auf $\tilde{V}_1$ operiert, folgt nun sofort die Behauptung.

12. Beweis der Satzes

In diesem Paragraphen wollen wir die Voraussetzungen des Satzes annehmen. Weiter sei stets $n \geqslant 2$. Ist $n \geqslant 3$, so können wir nach (3.7) annehmen, daß $\bar{L}_B$ keine *TI*-Menge in $\bar{M}$ ist. Weiter können wir nach (11.11) annehmen, daß $\bar{L}_B$ keine Involution enthält, die vom Typ a_2 auf $\tilde{Q}$ ist. Nach (6.5) können wir weiter annehmen, daß es ein $\bar{t} \in \bar{L}_B{}^{\#}$ gibt, so daß $|\bar{N}_t| > q$ ist.

(12.1) Lemma. *Sei $n \geqslant 3$. Dann gibt es ein $\bar{t} \in \bar{L}_B{}^{\#}$, so daß $R_t/N_t \simeq \Omega^{\pm}(6, q)$, $\Omega^{+}(8, q)$ oder $\Omega^{+}(12, q)$ ist.*

Beweis. Nach (3.10) gibt es ein $\bar{t} \in \bar{L}_B{}^{\#}$, so daß $R_t/N_t \simeq SL_m(q)$, $\Omega^{\pm}(2m, q)$ oder $Sp_{2m}(q)$ ist. Nach (10.9) können wir annehmen, daß $R_t/N_t \not\simeq SL_m(q)$ ist. Nach (9.8) können wir weiter annehmen, daß $R_t/N_t \not\simeq \Omega^{+}(4, q)$ ist.

Sei nun zunächst $R_t/N_t \simeq Sp_{2m}(q)$. Nach (8.3) ist dann $m = 3$ oder 4. Weiter erfüllt $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}_t))$ die Voraussetzungen des Satzes nach (8.6). Hierbei ist $H = \mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$. Sei $\bar{C} \subseteq \bar{N}$, $\bar{C} \neq \mathbf{Z}(\bar{R}_t)$, $\bar{C} \sim \mathbf{Z}(\bar{R}_t)$ in $\bar{M}$. Da $|\bar{N}_t| = q^9$ bzw. q^{17} ist, folgt nun mit (3.7), (11.11), (6.5), (3.10), (10.9), (9.8), (8.3) und (7.8), jeweils auf $\bar{C}$ angewandt, ein Widerspruch.

Also ist $R_t/N_t \simeq \Omega^{\pm}(2m, q)$. Nach (7.8) ist $m = 3, 4, 5$ oder 6. Sei $R_t/N_t \simeq \Omega^{-}(8, q)$ oder $\Omega^{+}(10, q)$. Nach (7.16) erfüllt dann wieder $\mathbf{N}_{\bar{H}}(\mathbf{Z}(\bar{R}_t))$ die Voraussetzungen des Satzes. Es ist $|\bar{N}_t| = q^{17}$. Weiter ist R_t/N_t irreduzibel auf $\bar{N}_t/\mathbf{Z}(\bar{N}_t)$ nach (7.9). Nun erhalten wir wie oben einen Widerspruch.

(12.2) Lemma. *Ist $m \geqslant 3$, so ist der Satz bewiesen.*

Beweis. Nach (7.16), (7.17), und (12.1) sind nur die Aussagen über $\mathbf{C}_{\bar{H}}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle)$ und M/H zu beweisen, $H = \mathbf{C}_M(\mathbf{Z}(Q))$. Nach (4.4) ist $\mathbf{C}_{\bar{H}}(\langle \bar{L}_B{}^{\bar{M}} \rangle)$

$= 1$. Weiter ist nach [7, Satz 4] M/H eine Untergruppe einer Frobeniusgruppe der Ordnung $(q-1)r$, wobei $q = 2^r$ ist. Nach [25, (2.18)] ist $q - 1 \mid |M/H|$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(12.3) LEMMA. *Ist $n = 2$, so ist $\langle \bar{L}_B{}^{M} \rangle \cong L_2(q)$.*

Beweis. Stets ist $|\bar{L}_B| \geqslant q$. Sei zunächst $|\bar{L}_B| \geqslant q^2$. Da $\Omega^+(4, q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$ und $\Omega^-(4, q) \cong L_2(q^2)$ ist, folgt nun mit [11] ein Widerspruch zu [7, Satz 5]. Also ist $|\bar{L}_B| < q^2$. Insbesondere ist $\tilde{Q}$ vom $(+)$-Typ. Nach [25, (2.18)] gibt es ein Element $\tau \in M - H$, $o(\tau) = q - 1$, weiter operiert τ fixpunktfrei auf $\bar{L}_B{}^{\#}$. Das liefert nun $|\bar{L}_B| = q$. Weiter liefert die Struktur von $\mathrm{Aut}(Q)$ die Behauptung.

REFERENZEN

1. E. ARTIN, The orders of the linear groups, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 355–365.
2. M. ASCHBACHER, On finite groups generated by odd transpositions I, *Math. Z.* **127** (1972), 45–56.
3. M. ASCHBACHER, On finite groups generated by odd transpositions IV, *J. Algebra* **26** (1973), 479–491.
4. M. ASCHBACHER, $GF(2)$-representations and factorizations in 2-constrained groups, erscheint.
5. M. ASCHBACHER AND G. SEITZ, Involutions in Chevalley groups over fields of even order, *Nagoya Math. J.* **63** (1976), 1–93.
6. M. ASCHBACHER AND G. SEITZ, On groups with a standard component of known type, *Osaka J. Math.* **13** (1976), 439–482.
7. B. BEISIEGEL, Semiextraspezielle p-Gruppen, *Math. Z.* **156** (1977), 247–254.
8. H. BENDER, On groups with abelian Sylow 2-subgroups, *Math. Z.* **117** (1970), 164–176.
9. R. BURKHARDT, Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2,p^f)$, *J. Algebra* **40** (1976), 75–96.
10. B. COOPERSTEIN AND G. MASON, Some questions concerning the representations of Chevalley groups of characteristic two, erscheint.
11. W. GASCHÜTZ, Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, *J. Reine Angew. Math.* **190** (1952), 93–107.
12. D. GILMAN AND D. GORENSTEIN, Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975), 1–127.
13. G. GLAUBERMANN, Central elements in core-free groups, *J. Algebra* **4** (1966), 403–421.
14. D. M. GOLDSCHMIDT, 2-fusion in finite groups, *Ann. of Math.* **99** (1974), 70–117.
15. D. GORENSTEIN, "Finite Groups," Harper & Row, New York, 1968.
16. R. GRIESS, Schur multipliers of the known finite simple groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 68–71.
17. K. HARADA, Finite groups with short chains of subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **20** (1968), 655–672.
18. B. HUPPERT, "Endliche Gruppen I," Grundlehren der math. Wiss. 134, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
19. J. MCLAUGHLIN, Some groups generated by transvections, *Arch. Math. (Basel)* **18** (1967), 364–368.

20. F. TIMMESFELD, Groups with weakly closed *TI*—subgroups, *Math. Z.* **143** (1975), 243–278.
21. F. TIMMESFELD, On elementary abelian *TI*—subgroups, *J. Algebra* **44** (1977), 457–476.
22. F. TIMMESFELD, Groups generated by root—involutions I, *J. Algebra* **33** (1975), 75–134.
23. F. TIMMESFELD, Groups generated by root—involutions II, *J. Algebra* **35** (1975), 367–441.
24. F. TIMMESFELD, Finite simple groups in which the generalized Fitting group of the centralizer of some involution is extraspecial, *Ann. of Math.* **107** (1978), 297–370.
25. F. TIMMESFELD, On the structure of 2-local subgroups in finite groups, *Math. Z.* **161** (1978), 119–136.
26. F. TIMMESFELD, A condition for the existence of a weakly closed *TI*-set, *J. Algebra* **60** (1979), 472–484.
27. F. TIMMESFELD, On finite groups in which a maximal Abelian normal subgroup of some maximal 2-local subgroup is a *TI*-set, *Proc. London Math. Soc.*, erscheint.
28. F. TIMMESFELD, A note on 2-groups of $GF(2^n)$-type, *Arch. Math. (Basel)* **32** (1979), 101–108.